Övning 3 i komplex analys

Förra gången: Kap 2.2–2.5

- Gränsvärden
- Derivator
- Analytiska funktioner
- Harmoniska funktioner

IDAG:

Kap 3.1: Exponentialfunktionen

3.2: Trigonometriska funktioner

3.4–3.5: Logaritmfunktionen

3.6: Komplexa exponenter

3.8: Grensnitt

Tal: 3.1.23, 3.2.12, 3.2.13, 3.4.7, 3.5.3, 3.5.5, 3.6.1, 3.6.3, 3.6.7

Nästa gång: Kap 4.1–4.2

- Linjeintegration

$\boxed{\text{s. } 153-172}$

3.1.23 Var antas maximum till

$|e^{z^2}|$ i $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ och vad

är detta värde?

Lösningsförslag

$$|e^{z^2}| = \left\{ \begin{array}{l} z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) \end{array} \right\} =$$

$$= |e^{r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)}| = |e^{r^2\cos 2\theta} \cdot e^{ir^2\sin 2\theta}| =$$

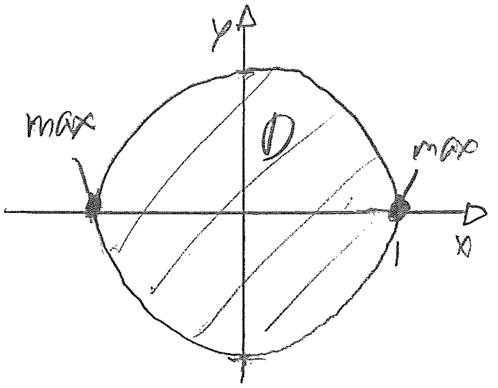
$$= |e^{r^2\cos 2\theta}| \cdot \underbrace{|e^{ir^2\sin 2\theta}|}_{=1} = e^{r^2\cos 2\theta}$$

I D är $e^{r^2\cos 2\theta} \leq e^{r^2} \leq e^1$

och de enda punkterna där

$r^2\cos 2\theta = 1$ är då $r = 1$ och

$\theta = 0$ el. $\theta = \pi$, d.v.s. $z = \pm 1$



Svar: Max antas då $z = \pm 1$ och maxvärdet är e.

3.2.12 Bevisa att

$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ m.h.a.

a) definitionen av $\cos(z)$ och $\sin(z)$

b) Eulers formel

Lösningsförslag

a) $\sin^2(z) + \cos^2(z) =$

$$= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{\cancel{e^{2iz}} - 2\overbrace{e^{iz-iz}}^{=1} + \cancel{e^{-2iz}}}{-4} + \frac{\cancel{e^{2iz}} + 2\overbrace{e^{iz-iz}}^{=1} + \cancel{e^{-2iz}}}{4} =$$

$$= \frac{4}{4} = 1 \quad \text{v.s.v.}$$

---

b) $\sin^2 z + \cos^2 z = (\cos z + i\sin z)(\cos z - i\sin z) =$

$= (\cos z + i\sin z)(\cos(-z) + i\sin(-z)) =$

$= \{\text{Eulers formel}\} = e^{iz} e^{-iz} = e^0 = 1$

v.s.v.

3.2.13 Visa att

$$\frac{d}{dz}\sin(z) = \cos(z)$$

Lösningsförslag

$$\frac{d}{dz}\sin z = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right) =$$

$$= \left\{ \frac{d}{dz} e^{g(z)} = e^{g(z)} \cdot g'(z) \right\} =$$

$$= \frac{i e^{iz} - (-i) e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos(z)$$

V.S.V.

3.4.7 Hitta alla värden på

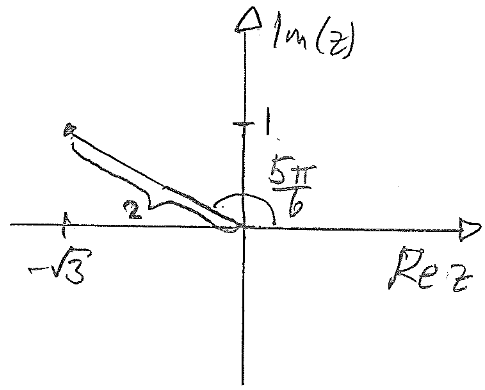
$$\log((-\sqrt{3}+i)^4)$$

och ange principalvärdet.

Lösningsförslag

$(-\sqrt{3}+i)^4 = 2^4 e^{i4\cdot\frac{5\pi}{6}} =$

$= 16\, e^{i\frac{10\pi}{3}}$



$\Rightarrow \log((-\sqrt{3}+i)^4) = \mathrm{Log}(16) + i\left(\frac{10\pi}{3} + 2k\pi\right)$

där $k \in \mathbb{Z}$.

Principalvärdet ges då argumentet $\frac{10\pi}{3} + 2k\pi$ är mellan $-\pi$ och π.

Då $\frac{10\pi}{3} + 2k\pi = -\frac{2\pi}{3} + 2(k+2)\pi$ ser vi att principalvärdet är

$\mathrm{Log}\,16 - i\frac{2\pi}{3}$ $(k=-2)$.

Svar: $\log((-\sqrt{3}+i)^4) = \mathrm{Log}\,16 + i\left(\frac{10\pi}{3} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$

$\mathrm{Log}((-\sqrt{3}+i)^4) = \mathrm{Log}\,16 - i\frac{2\pi}{3}$

3.5.3 och 3.5.5

Om en gren till $\log z$ ges av grensnittet $x=0, y\geq 0$, och $\log(-1) = -i\pi$, vad är

a) $\log(1)$

b) $\log(-e+ie)$

Lösningsförslag

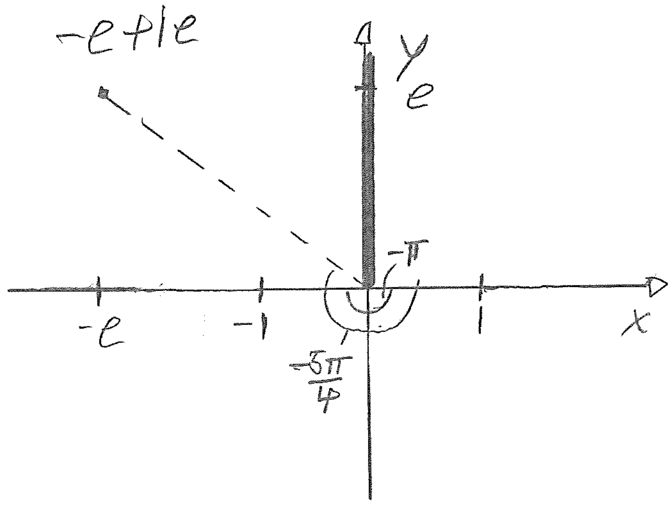
Grensnittet ger att

$$\log(z) = \mathrm{Log}\, r + i\theta$$

där

$$-\frac{3\pi}{2} + 2k\pi < \theta \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

för något k. Då $\log(-1) = -i\pi$ ser vi att $k=0$.



V.g.v.

Med andra ord är $\arg 1 = 0$ och $\arg(-e+ie) = -\frac{5\pi}{4}$ om vi vill hålla oss inom den givna grenen.

Detta ger

$$\log(1) = \text{Log}(1) + i\cdot 0 = 0$$

$$\log(-e+ie) = \text{Log}(\sqrt{2}\,e) - i\frac{5\pi}{4} =$$
$$= 1 + \text{Log}(\sqrt{2}) - i\frac{5\pi}{4}$$

Svar: a) $\log(1) = 0$

b) $\log(-e+ie) = 1 + \text{Log}(\sqrt{2}) - i\frac{5\pi}{4}$

3.6.1, 3.6.3 och 3.6.7

Hitta alla värden på

a) 1^{2i} b) $(\sqrt{3}+i)^{1-2i}$ c) $\pi^{i/2}$

Lösningsförslag

a) $1^{2i} = e^{2i\log(1)} = e^{2i(\mathrm{Log}(1)+i2k\pi)} =$

$= e^{-4k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}$

b) $(\sqrt{3}+i)^{1-2i} = e^{(1-2i)(\mathrm{Log}(2)+i(\frac{\pi}{6}+2k\pi))} =$

$= e^{\mathrm{Log}(2)+i(\frac{\pi}{6}+2k\pi)+\frac{\pi}{3}+4k\pi-i2\mathrm{Log}(2)}$

$= 2e^{\frac{\pi}{3}+4k\pi+i(\frac{\pi}{6}-2\mathrm{Log}(2))}, \quad k \in \mathbb{Z}$

V.g.v.

c) $\pi^{i/2} = e^{\frac{i}{2}\log(\pi)} = e^{\frac{i}{2}(\mathrm{Log}(\pi) + i2k\pi)} =$

$= e^{-k\pi + i\frac{\mathrm{Log}(\pi)}{2}}, \quad k \in \mathbb{Z}$

<u>Svar:</u> a) $1^{2i} = e^{-4k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}$

b) $(\sqrt{3}+i)^{1-2i} = 2e^{\frac{\pi}{3} + 4k\pi + i(\frac{\pi}{6} - 2\mathrm{Log}(2))}$

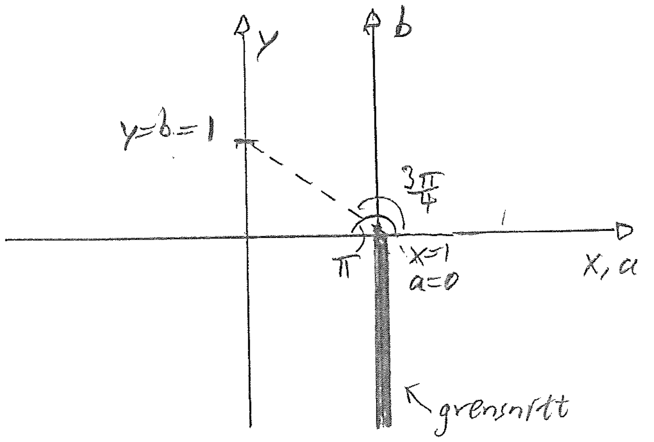
c) $\pi^{i/2} = e^{-k\pi + i\frac{\mathrm{Log}(\pi)}{2}}$

3.8.7 En gren till $f(z)=(z-1)^{2/3}$ är definierad genom grensnittet $x=1, y\leq 0$. Om $f(0)=1$, vad är $f(i)$ och $f'(i)$?

Lösningsförslag

Vi gör en translation, d.v.s.

låt $w := z-1$. Om $w=a+ib$ ges grensnittet av $a=0$, $b\leq 0$.



Om $w=re^{i(\theta+2k\pi)}$ så är

$$w^{2/3}=\sqrt[3]{r^2}\,e^{i\left(\frac{2\theta}{3}+\frac{4\pi k}{3}\right)}$$

När $z=0$ är $w=-1$, och villkoret $f(w=-1)=0$ ger, med $r=1$ och $\theta=\pi$, att

$$1=\sqrt[3]{1^2}\,e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi k}{3}\right)}=e^{i2\pi\left(\frac{1+2k}{3}\right)},$$

V.g.v.

Vi ser att $\frac{1+2k}{3} = m$ där

m är ett heltal. Detta fås för

t.ex. $k=1$.

För att gå från $z=0$ till $z=i$

inom samma gren, låter vi θ

gå från π till $\frac{3\pi}{4}$. Detta ger

Obs! $k=1$

$$f(i) = (i-1)^{2/3} = \sqrt[3]{\sqrt{2}^2}\, e^{i\frac{2}{3}\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi\right)} =$$

$$= \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{11\pi}{6}} = \frac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

$$f'(z) = \frac{2}{3}\frac{(z-1)^{2/3}}{z-1}$$

$$\Rightarrow f'(i) = \frac{2}{3}\frac{(i-1)^{2/3}}{i-1} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{11\pi}{6}}}{\sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}} =$$

$$= \frac{\sqrt[6]{2^5}\, e^{i\frac{13\pi}{12}}}{3}$$

Svar: $f(i) = \sqrt[3]{2}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$$f'(i) = \frac{\sqrt[6]{2^5}\, e^{i\frac{13\pi}{12}}}{3}$$