Övning 4 i komplex analys

Förra gången:

Kap 3.1: Exponentialfunktionen
3.2: Trigonometriska funktioner
3.4–3.5: Logaritmfunktionen
3.6: Komplexa exponenter
3.8: Grensnitt

IDAG: Kap 4.1–4.2: – Linjeintegration

Tal: 4.2: 4, 6, 8, 14, 16, 17,
89 (Problem till tentamen del B)

Nästa gång: Kap 4.3–4.4
- Linjeintegration
  - Cauchy-Goursats sats
  - Deformationsprincipen
  - Vägoberoende
  - Integralkalkylens fundamentalsats

$\boxed{\text{s. 172–192}}$

Repetition

$$e^z \stackrel{\text{det}}{=} e^x(\cos(y)+i\sin(y))$$

$$\sin(z) \stackrel{\text{det}}{=} \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \qquad \cos(z) \stackrel{\text{det}}{=} \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

$$\sinh(z) \stackrel{\text{det}}{=} \frac{e^{z}-e^{-z}}{2} \qquad \cosh(z) \stackrel{\text{det}}{=} \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$$

$$\log(z) \stackrel{\text{det}}{=} \mathrm{Log}|z| + i\arg(z), \quad z \neq 0$$

Observera att $\log(z)$ är flervärd.

——— * ———

Idag

Om $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ så är

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma u(x,y)\,dx - \int_\Gamma v(x,y)\,dy + i\left[\int_\Gamma v(x,y)\,dx + \int_\Gamma u(x,y)\,dy\right]$$

där Γ är en kurva i $\mathbb{C}$.

Vi kan även parametrisera Γ och får då

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\frac{dz}{dt}\,dt.$$

——— * ———

4.2.4 och 4.2.6

$$I = \int_i^1 \bar{z}\, dz$$

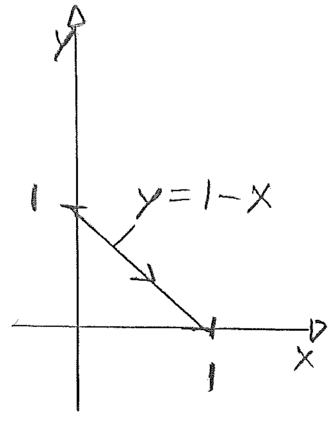
längs a) $x+y=1$, b) $x^2+y^2=1$, $x,y \geq 0$.

Lösningsförslag

a) Vi parametriserar,

Om $z = x+iy$ låter

vi $x = x(t) = t$



$\Rightarrow$ $y = y(t) = 1-t$. $z=i \Rightarrow t=0$, $z=1 \Rightarrow t=1$.

$$\int_i^1 \bar{z}\, dz = \int_0^1 (x(t) - iy(t)) \frac{dz}{dt}\, dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} z(t) = x(t) + iy(t) = t + i(1-t) \\ \Rightarrow \frac{dz}{dt} = 1-i \end{array} \right\} =$$

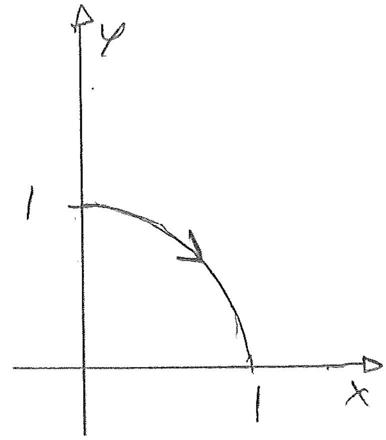
$$= \int_0^1 (t - i(1-t))(1-i)\, dt = \int_0^1 2t-1-i\, dt =$$

$$= \left[t^2 - t - it\right]_0^1 = -i \quad \underline{\text{Svar a)}} \quad I = -i$$

---

b) Låt $z(t) = e^{it} \Rightarrow$

$z = i \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \quad z = 1 \Rightarrow t = 0$



$z(t) = e^{it} \Rightarrow \bar{z}(t) = e^{-it}$

$$\frac{dz}{dt} = i e^{it}$$

$$I = \int_i^1 \bar{z}\, dz = \int_{\pi/2}^0 \bar{z}(t) \frac{dz}{dt}\, dt =$$

$$= \int_{\pi/2}^0 e^{-it}\, i e^{it}\, dt = i \int_{\pi/2}^0 dt = -i\frac{\pi}{2}$$

Svar b: $-\frac{i\pi}{2}$

4.2.8 Beräkna $\displaystyle\int_1^{-1} \frac{1}{z}\,dz$

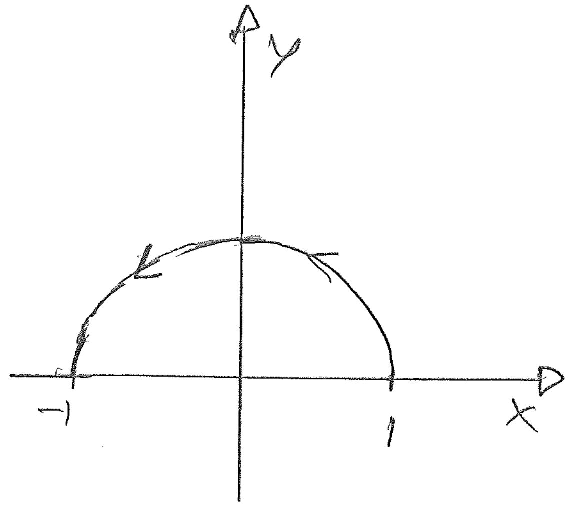
längs halvcirkeln $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$

Lösningsförslag:

Vi parametriserar Γ via $z(t) = e^{it}$,

$z = 1 \Rightarrow t = 0$,

$z = -1 \Rightarrow t = \pi$.



Detta ger $\displaystyle\int_1^{-1} \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{\pi} \frac{1}{z(t)} \frac{dz}{dt}\,dt =$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{e^{it}} \cdot i e^{it}\,dt = \int_0^{\pi} i\,dt = i\pi$$

Svar: $\displaystyle\int_1^{-1} \frac{1}{z}\,dz = i\pi$

4.2.14 Visa att $|I| \le \sqrt{5}\, e^3$

om $I = \int_0^{2+i} e^{z^2}\, dz$ längs linjen $x = 2y$.

*

Lösningsförslag:

$$|I| = \left| \int_0^{2+i} e^{z^2}\, dz \right| \le \int_0^{2+i} |e^{x^2-y^2+i2xy}|\,|dz|$$

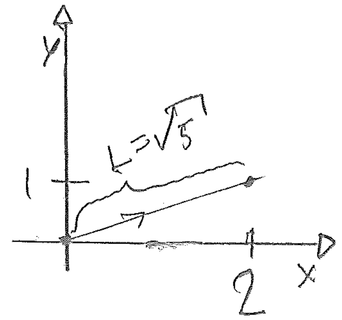
$$= \int_0^{2+i} \overbrace{|e^{x^2-y^2}|}^{\ge 0}\, \overbrace{|e^{i2xy}|}^{=1}\, |dz| = \int_0^{2+i} e^{x^2-y^2}\, |dz|$$

Då $e^{x^2-y^2} = e^{(2y)^2-y^2} = e^{3y^2} \le e^3$ om $0 \le y \le 1$,

har vi

$$\int_0^{2+i} e^{x^2-y^2}\, |dz| \le e^3 \int_0^{2+i} |dz| = e^3 L \quad \text{där}$$

L är längden på linjestycket, som är $\sqrt{5}$.



Därmed är det visat att $|I| \le \sqrt{5}\, e^3$.

*

*

4.2.16 Visa att $|I| \leq 1{,}479\, e^{\pi/2}$

om $I = \int_i^1 e^{i\,\mathrm{Log}(\bar{z})}\,dz$ längs

parabeln $y = 1 - x^2$

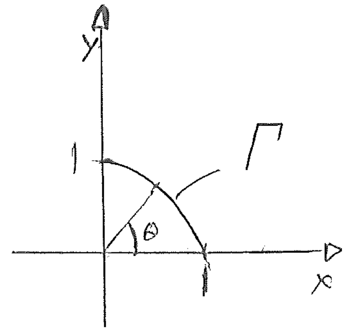
*

Lösningsförslag

Om $z = re^{i\theta}$ så

är $\bar{z} = re^{-i\theta}$ vilket ger

*



$$i\,\mathrm{Log}(\bar{z}) = i(\mathrm{Log}(r) - i\theta) = \theta + i\,\mathrm{Log}(r)$$

ML-olikheten ger

$$\left| \int_i^1 e^{i\,\mathrm{Log}(\bar{z})}\,dz \right| \leq \int_i^1 |e^{\theta + i\,\mathrm{Log}(r)}|\,|dz| =$$

$$= \int_i^1 \underbrace{|e^{\theta}|}_{\geq 0}\,\underbrace{|e^{i\,\mathrm{Log}(r)}|}_{=1}\,|dz| = \int_i^1 e^{\theta}\,|dz| \leq$$

$$\leq \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ (se figur ovan)} \\ \Rightarrow \quad e^{\theta} \leq e^{\pi/2} \end{array} \right\} \leq e^{\pi/2} \underbrace{\int_i^1 |dz|}_{=L}.$$

V.g.v.

Längden L av kurvan

$\Gamma: \; y = 1 - x^2, \quad 0 \le x \le 1$ ges av

$$L = \int_\Gamma ds = \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$$

$$= \quad 2x + \sqrt{4x^2+1} = t \qquad x = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow t = 2 + \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow x = \frac{t^2 - 1}{4t}, \quad \sqrt{4x^2+1} = t - 2x = \frac{t^2+1}{2t}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{8t^2 - 4t^2 + 4}{16t^2} = \frac{t^2+1}{4t^2}$$

$$= \int_1^{2+\sqrt{5}} \left(\frac{t^2+1}{2t}\right)\left(\frac{t^2+1}{4t^2}\right) dt = \frac{1}{8} \int_1^{2+\sqrt{5}} t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\, dt =$$

$$= \frac{1}{8} \left[\frac{t^2}{2} + 2 \ln t - \frac{t^{-2}}{2} \right]_1^{2+\sqrt{5}} = \frac{1}{4}\left(2\sqrt{5} + \ln(2+\sqrt{5})\right) \le 1{,}479$$

Slutsats: $|I| \le 1{,}479\, e^{\pi/2}$ v.s.v

4.2.17 Låt $g(t)$ vara en komplexvärd funktion av en reellvärd variabel t.

a) Visa, för $b > a$, att

$$\left| \int_a^b g(t)\,dt \right| \leq \int_a^b |g(t)|\,dt$$

b) Visa att

$$\left| \int_0^1 \sqrt{t}\, e^{it}\,dt \right| \leq \frac{2}{3}$$

---

*

Lösningsförslag

a) $$\left| \int_a^b g(t)\,dt \right| = \left| \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} g(t_k)\Delta t_k \right|$$

$$\leq \{\text{triangelolikheten}\} \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |g(t_k)||\Delta t_k| =$$

V.g.v.

$$= \{\Delta t_k > 0\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |g(t_k)| \Delta t_k$$

$$= \int_a^b |g(t)| dt \quad \text{v.s.v.}$$

---

b)

$$\left| \int_0^1 \sqrt{t}\, e^{it} dt \right| \leq \int_0^1 |\sqrt{t}\, e^{it}| dt =$$

$$= \{ |\sqrt{t}\, e^{it}| = |\sqrt{t}||e^{it}| = \sqrt{t} \} =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{t}\, dt = \left[\frac{2t^{3/2}}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \quad \text{v.s.v}$$

---

89 (Problem till tentamen del B)

Beräkna $I = \int_\Gamma \text{Log}(z+1)\,dz$ där

Γ är en halvcirkelbåge i övre halvplanet med radien ett och medelpunkten i $z=-1$. Bågen genomlöps från $z=0$ till $z=-2$

*

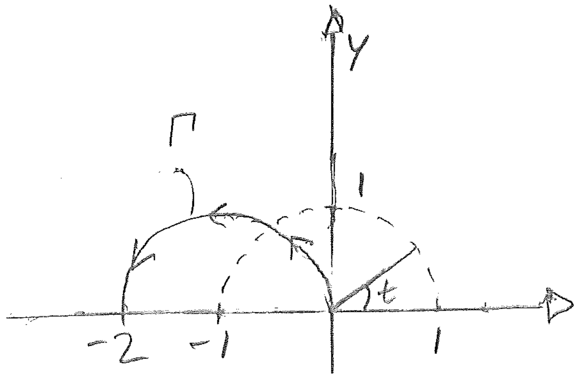
Lösningsförslag: Vi parametriserar Γ,

$z+1 = e^{it} \Leftrightarrow z = e^{it}-1,$

$z=0 \Rightarrow t=0,$

$z=-2 \Rightarrow t=\pi,$

$\frac{dz}{dt} = ie^{it}$. Detta ger



$$I = \int_\Gamma \text{Log}(z+1)\,dz = \int_0^\pi \text{Log}(e^{it})\,ie^{it}\,dt =$$

v.g.v.

$$= \int_0^{\pi} \Big(\underbrace{\mathrm{Log}|e^{it}|}_{=0} + i\arg(e^{it})\Big)\, i e^{it}\, dt =$$

↑ OBS! Principalargumentet

⌈ principalargumentet av e^{it} är

$t+2k\pi$, $\quad -\pi < t+2k\pi \leq \pi$, och då

$=$ vi befinner oss i intervallet $[0,\pi)$ $=$

måste k vara noll. ⌋

$$= \int_0^{\pi} it\, i e^{it}\, dt = -\int_0^{\pi} t e^{it} = -\left[\frac{t e^{it}}{i}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{e^{it}}{i}\, dt =$$

$$= -i\pi + \left[\frac{e^{it}}{i^2}\right]_0^{\pi} = -i\pi + (1-(-1)) = 2 - i\pi$$

<u>Svar:</u> $I = 2 - i\pi$

*