Övning 5 i komplex analys

Förra gången: Kap 4.1–4.2:
- Linjeintegration

*

IDAG: Kap 4.3–4.4
- Linjeintegration
  - Cauchy-Goursats sats
  - Deformationsprincipen
  - Vägoberoende
  - Integralkalkylens fundamentalsats

Tal
4.3: 2, 4, 6, 17, 20, 22
4.4: 4, 6

*

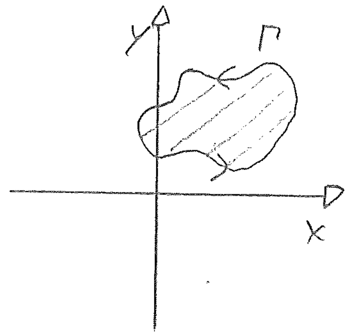
Nästa gång:
Kap 4.5–4.6: Cauchys integralformel

$\boxed{\text{S. 192 – 214}}$

*

Cauchy-Goursats sats

- Γ enkel sluten kurva
- f analytisk innanför Γ och på Γ.



$\Rightarrow$

- $\oint_\Gamma f(z)\,dz = 0$

Vägoberoende och integralkalkylens fundamentalsats

Låt f vara analytisk i D. Då är $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$, $z_1, z_2 \in D$, oberoende av vägen Γ så länge Γ är i D.

Vidare är $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1)$ om F är en primitiv funktion till f som är analytisk i D.

4.3.2, 4.3.4 och 4.3.6

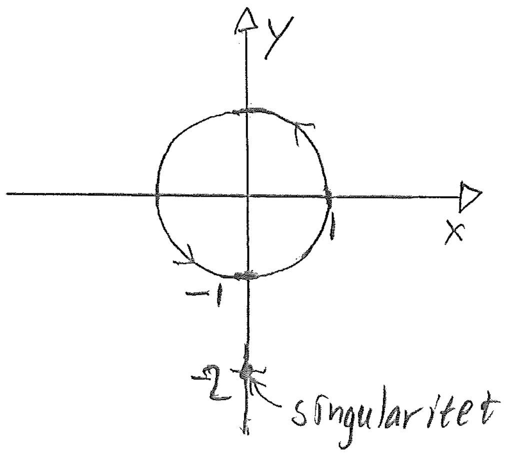
Till vilka av följande integraler är Cauchy-Goursats sats direkt tillämpbar?

a) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{z+2i}\,dz$ b) $\oint\limits_{|z-3i|=6} e^{\bar{z}}\,dz$ c) $\oint\limits_{|z-1-i|=1} \mathrm{Log}(z)\,dz$

*

Lösningsförslag

a) Integranden $\frac{\sin(z)}{z+2i}$ är analytisk i hela $\mathbb{C}$ förutom då nämnaren $z+2i$ är 0, d.v.s. då $z=-2i$.



Eftersom $-2i$ varken ligger på kurvan eller innanför denna betyder detta att Cauchy-Goursats sats är tillämpbar, så $\int\limits_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{z+2i}\,dz = 0$. v.g.v.

*

b) Funktionen $e^{\bar{z}}$ är inte analytisk vilket t.ex. kan visas med hjälp av Cauchy-Riemanns ekvationer (C-R):

$$e^{\bar{z}} = e^{x-iy} = e^{x}(\cos(-y) + i\sin(-y))$$

$$= \underbrace{e^{x}\cos(y)}_{=u(x,y)} + i(\underbrace{-e^{x}\sin(y)}_{v(x,y)})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = e^{x}\cos(y) = \{(C\text{-}R)\} = \frac{\partial v}{\partial y} = -e^{x}\cos(y) & (1) \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -e^{x}\sin(y) = \{(C\text{-}R)\} = -\frac{\partial u}{\partial y} = e^{x}\sin(y) & (2) \end{cases}$$

Dessa ekvationer är aldrig uppfyllda samtidigt eftersom

$$\begin{cases} (1) \Leftrightarrow 2e^{x}\cos(y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ (2) \Leftrightarrow 2e^{x}\sin(y) = 0 \Leftrightarrow y = n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

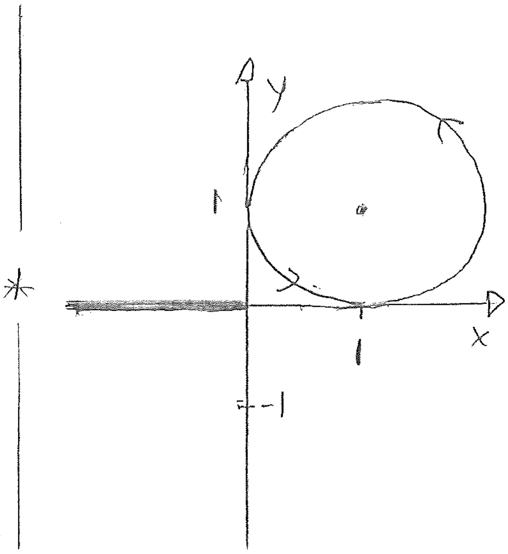
$\Rightarrow \frac{\pi}{2} = (n-k)\pi$ vilket är omöjligt

för $k, n \in \mathbb{Z}$. v.s.v.

Detta betyder att Cauchy-Goursats sats inte är tillämpbar.

*

c) Integranden Log(z) är analytisk på och innanför den givna kurvan eftersom grensnittet till principal-grenen ligger längs den negativa realaxeln (se figur). Därför är



Cauchy-Goursats sats tillämpbar,

$$\oint_{|z-1-i|} \mathrm{Log}(z)\,dz = 0$$

*

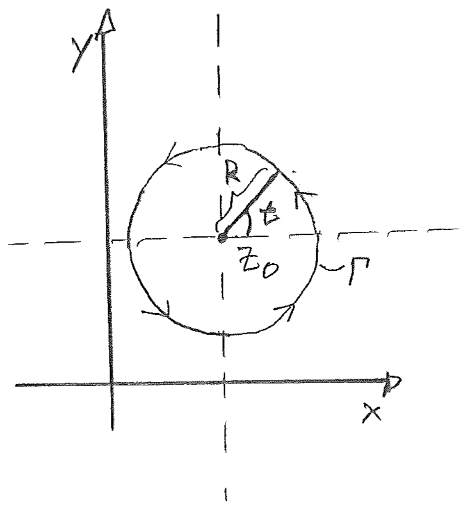
4.3.17 Låt $R > 0$ och $z_0 \in \mathbb{C}$ vara givna. Visa att

$$I = \oint_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^n \, dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases}$$

*

Lösningsförslag

Låt Γ beteckna kurvan. Vi ser att den kan parametriseras på följande sätt, *



$$z(t) = z_0 + Re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

$$\frac{dz}{dt} = iRe^{it}.$$ Detta ger

$$I = \int_0^{2\pi} (Re^{it})^n \, iRe^{it} \, dt =$$

$$= R^{n+1} \int_0^{2\pi} i e^{i(n+1)t} \, dt \qquad \text{v.g.v.}$$

Om $n \neq -1$ blir denna integral

$$R^{n+1}\left[\frac{e^{i(n+1)t}}{n+1}\right]_0^{2\pi} = \frac{R^{n+1}}{n+1}(1-1) = 0.$$

Om $n = -1$ får vi istället

$$R^0 i \int_0^{2\pi} e^{i \cdot 0 t}\, dt = i \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi i.$$

Sammanfattningsvis har vi att

$$\oint_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^n\, dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1, \end{cases} \quad \text{v.s.v.}$$

*

4.3.20 och 4.3.22

Beräkna följande integraler,

a) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{z}{z-i}\,dz$, b) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{z^m}{(z-1)^m}\,dz$, $m \geq 0$,

om Γ består av kvadraten med

hörn i $\pm(2 \pm 2i)$.

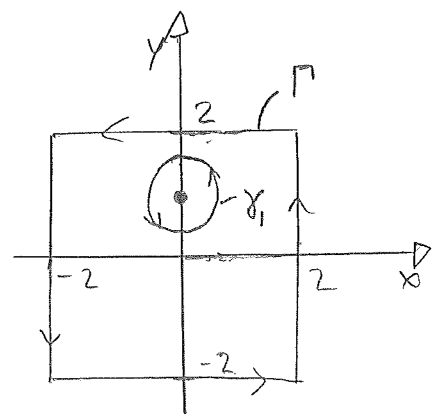
*

Lösningsförslag

a) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{z}{z-i}\,dz = \oint_\Gamma \frac{z-i+i}{z-i}\,dz =$

$\displaystyle = \oint_\Gamma 1\,dz + i\oint_\Gamma \frac{1}{z-i}.$

*



Figur 1

Den första integralen är noll tack vare Cauchy-Goursats sats.

Då Γ kontinuerligt kan deformeras till cirkeln γ_1 (se Figur 1)

 v.g.v.

utan att passera genom några singulariteter till $\frac{1}{z-i}$ (som utgörs av $z=i$), ger deformationsprincipen att

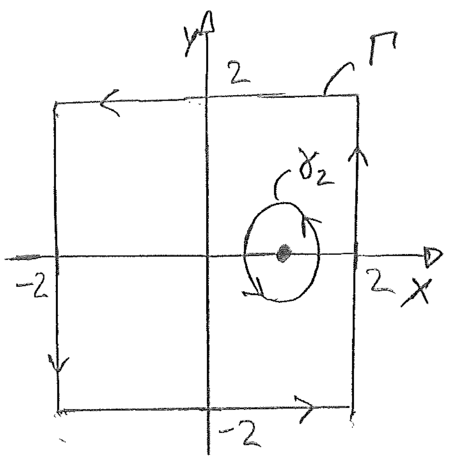
$$i\oint_{\Gamma}\frac{1}{z-i}\,dz = i\oint_{\gamma}\frac{1}{z-i}\,dz =$$

$$= \{\text{se Problem } 4.3.17\} = i\cdot 2\pi i = -2\pi$$

<u>Svar a:</u> $\oint_{\Gamma}\frac{z}{z-i}\,dz = -2\pi$

*

b) Integranden $\frac{z^m}{(z-1)^m}$ har endast singulariteten $z=1$, och eftersom Γ kontinuerligt kan deformas till cirkeln γ_2 utan att passera



Figur 2

V.g.v.

denna singularitet ger deformationsprincipen att $\oint_{\Gamma} \frac{z^m}{(z-1)^m}\,dz = \oint_{\gamma_2} \frac{z^m}{(z-1)^m}\,dz.$

Vi beräknar integralen i högerled,

$$\oint_{\gamma_2} \frac{z^m}{(z-1)^m}\,dz = \oint_{\gamma_2} \frac{((z-1)+1)^m}{(z-1)^m}\,dz =$$

$$= \{\text{Binomialsatsen}\} = \oint_{\gamma_2} \frac{\sum_{k=0} \binom{m}{k}(z-1)^k \cdot 1^{m-k}}{(z-1)^m}\,dz$$

$$= \oint_{\gamma_2} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}(z-1)^{k-m}\,dz = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \oint_{\gamma_2} (z-1)^{k-m}\,dz =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Enligt Problem 4.3.17 är} \\ \int_{\gamma_2} (z-1)^{k-m}\,dz = \begin{cases} 0, & k-m \neq -1 \\ 2\pi i, & k-m = -1 \end{cases} \end{array} \right\} =$$

$$= \underbrace{\binom{m}{m-1}}_{=m} \cdot 2\pi i = 2\pi m i$$

Svar b: $\oint_{\Gamma} \frac{z^m}{(z-1)^m}\,dz = 2\pi m i$

4.4.4 och 4.4.6

Använd integralkalkylens första fundamentalsats för att beräkna

a) $\displaystyle\int_{1+i}^{4+2i} z+z^{-2}\,dz$, b) $\displaystyle\int_{0}^{4+2i} e^{z}\cosh(e^{z})\,dz$

längs kurvan $y=\sqrt{x}$.

*

Lösningsförslag

a) En primitiv funktion till $z+z^{-2}$ är $\frac{z^2}{2}-z^{-1}$ som är analytisk i $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, och eftersom kurvan $y=\sqrt{x}$ ligger i $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ kan integralkylens första fundamentalsats (Sats 6 i kursboken)

v.g.v.

användas,

$$\int_{1+i}^{4+2i} z+z^{-2}\,dz = \left[\frac{z^2}{2} - z^{-1}\right]_{1+i}^{4+2i} =$$

$$= \left(\frac{(4+2i)^2}{2} - \frac{1}{4+2i}\right) - \left(\frac{(1+i)^2}{2} - \frac{1}{1+i}\right) =$$

$$= \frac{63}{10} + i\,\frac{33}{5}$$

<u>Svar a:</u> $\int_{1+i}^{4+2i} z+z^{-2}\,dz = \frac{63}{10} + i\,\frac{33}{5}$

--- * ---

b) $\int_{0}^{4+2i} e^{z}\cosh(e^{z})\,dz = \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dz}(\sinh(e^{z})) = e^{z}\cosh(z), \\ \sinh(e^{z}) \text{ analytisk} \\ \text{i hela } \mathbb{C} \end{array} \right\} = \left[\sinh(e^{z})\right]_{0}^{4+2i} =$

$$= \sinh(e^{4+2i}) - \sinh(1)$$

<u>Svar b:</u> $\int_{0}^{4+2i} e^{z}\cosh(e^{z})\,dz = \sinh(e^{4+2i}) - \sinh(1)$

--- * ---

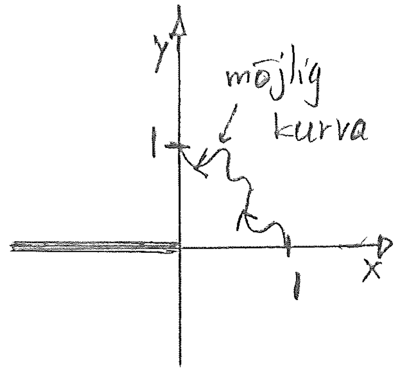
4.4.12

Hitta $\int_1^i z^{1/2}\,dz$, där grenen ges av att $1^{1/2}=-1$. Kurvan passerar inte grensnittet som ges av $x \le 0, y=0$.

*

Lösningsförslag

En primitiv funktion till $z^{1/2}$ är $\frac{2}{3}z^{3/2}$ (med samma gren), och då kurvan går



genom ett område där $z^{3/2}$ är analytisk, kan integralkalkylens första fundamentalsats användas, vilket ger

$$\int_1^i z^{1/2}\,dz = \left[\frac{2}{3}z^{3/2}\right]_1^i = \left[\frac{2}{3}z\cdot z^{1/2}\right]_1^i$$

$$= \frac{2}{3}\left(i\cdot i^{1/2} - 1\cdot 1^{1/2}\right)$$

v.g.v.

Det är givet att

$$-1 = 1^{1/2} = e^{\frac{1}{2} i \cdot 2k\pi} \Rightarrow k=1$$

vilket ger $i^{1/2} = e^{\frac{1}{2} i \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right)} = e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

Integralen blir därför

$$\frac{2}{3}\left(i e^{i\frac{5\pi}{4}} - 1\cdot(-1)\right) = \frac{2}{3}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{4}\right)} + 1\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(e^{i\frac{7\pi}{4}} + 1\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} + 1\right) =$$

$$= \frac{2+\sqrt{2}}{3} - i\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Svar: $\int_1^i z^{1/2}\, dz = \frac{2+\sqrt{2}}{3} - i\frac{\sqrt{2}}{3}$