Övning 6 i komplex analys

Förra gången: Kap 4.3–4.4:

- Linjeintegration
  - Cauchy Goursats sats
  - Deformationsprincipen
  - Vägoberoende
  - Integralkalkylens fundamentalsats

*

IDAG:

Kap. 4.5: – Cauchys integralformel

4.6: – Gauss medelvärdessats

– Maximum modulus-satsen

Tal: 4.5: 2, 4, 8, 11, 17

4.6: 1, 2, 4, 10

*

Nästa gång: Kap. 5.2, 5.4–5.7

– Taylorserier

– Laurentserier

$\boxed{\text{s. } 232-242 + 249-307}$

*

Cauchys utvidgade integralformel

- f analytisk i D.
- C är en enkel sluten kurva i C och z_0 är innanför C.

$\Longrightarrow$

- $$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz.$$

*

Gauss medelvärdessats

- f analytisk i ett enkelt sammanhängande område D.
- Cirkeln $C = \{z \in \mathbb{C} : z = z_0 + re^{i\theta}, 0 \le \theta \le 2\pi\}$ är i D, $r > 0$.

$\Longrightarrow$

- $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$$

*

Maximum modulus-satsen

- $R \subset \mathbb{C}$ sluten och begränsad
- f kontinuerlig i R
- f analytisk i det inre av R

$\Longrightarrow$

- $|f|$ antar maximum på randen till R.

*

4.5.2, 4.5.4, 4.5.8 och 4.5.11

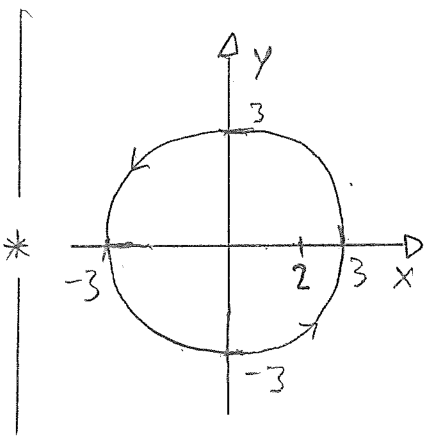
Beräkna

a) $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{\sin(z)}{z-2}\,dz$ b) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\cosh(z)}{(z-3)(z-1)}\,dz$

c) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-1|=2} \frac{e^{iz}}{(z-i)^2}\,dz$ d) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-1|=2} \frac{\cos(z)}{(z-1)^3}$

*

Lösningsförslag



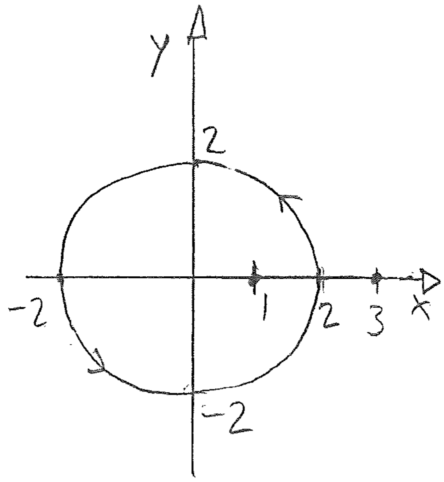
a) $\sin(z)$ är analytisk i hela $\mathbb{C}$, och i synnerhet på och innanför kurvan $|z|=3$. Då punkten $z=2$ ligger innanför kurvan ger Cauchys integralformel att $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{\sin(z)}{z-2}\,dz = 2\pi i\sin(2)$.

Svar a: $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{\sin(z)}{z-2}\,dz = 2\pi i\sin(2)$.

V.g.v.

*

b) Eftersom $z=3$ ligger utanför kurvan $|z|=2$ ser vi att



$\frac{\cosh(z)}{z-3}$ är analytisk

på och innanför denna kurva.

Samtidigt ligger $z=1$ innanför.

Därför ger Cauchys integralformel att

$$\oint_{|z|=2} \frac{\cosh(z)}{(z-3)(z-1)}\,dz = \oint_{|z|=2} \frac{\left(\frac{\cosh(z)}{z-3}\right)}{z-1}\,dz =$$

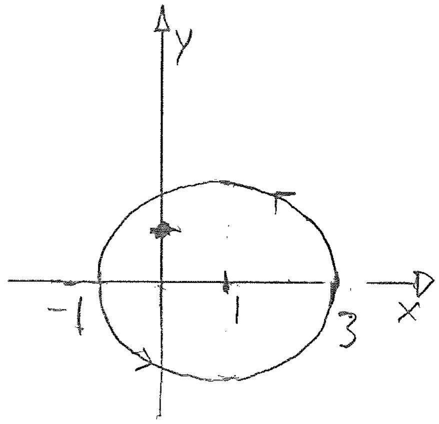
$$= 2\pi i \frac{\cosh(1)}{(1-3)} = -\pi i \cosh(1)$$

<u>Svar b</u>: $\oint_{|z|=2} \frac{\cosh(z)}{(z-3)(z-1)}\,dz = -\pi i \cosh(1)$

v.g.v

---*---

c) Singulariteten $z=i$ till integranden ligger innanför kurvan, och e^{iz} är analytisk i $\mathbb{C}$, så Cauchys utvidgade integralformel kan användas,



$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-1|=2} \frac{e^{iz}}{(z-i)^2}\,dz = \frac{d}{dz}\,e^{iz}\Big|_{z=i}$$

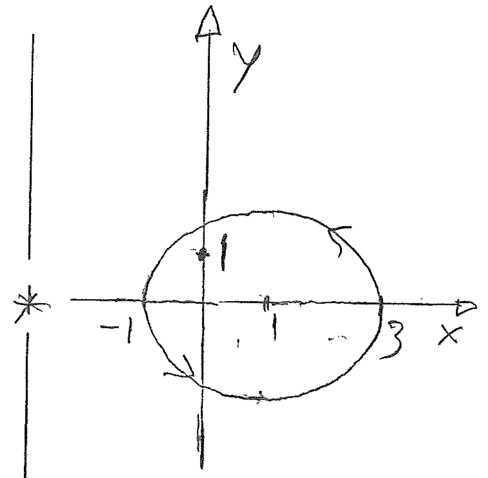
$$= i e^{i\cdot i} = i e^{-1}$$

<u>Svar c:</u> $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-1|=2} \frac{e^{iz}}{(z-i)^2}\,dz = i e^{-1}.$

v.g.v.

*

d) Funktionen $\cos(z)$ är analytisk i hela $\mathbb{C}$, medan singulariteten $z=i$ ligger innanför kurvan.



Cauchys utvidgade integralformel ger därmed

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-1|=2} \frac{\cos(z)}{(z-i)^3}\,dz = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2\pi i}\oint_{|z-1|=2} \frac{\cos(z)}{(z-i)^3}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{d^2}{dz^2}\cos(z)\Big|_{z=i} = \frac{-\cos(i)}{2}$$

<u>Svar d:</u> $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-1|=2} \frac{\cos(z)}{(z-i)^3}\,dz = \frac{-\cos(i)}{2}$

——— * ———

4.5.17 Om $a \in \mathbb{R}$ och $|a|<1$, visa att

$$\int_0^{2\pi} \frac{1-a\cos(\theta)}{1-2a\cos(\theta)+a^2}\,d\theta = 2\pi.$$

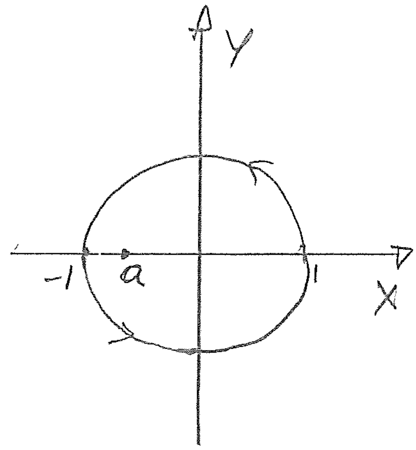
*

Lösningsförslag

Om vi först betraktar

$$I := \oint_{|z|=1} \frac{1}{z-a}\,dz$$

ser vi att



Cauchys integralformel ger $I = 2\pi i$. Det går även att räkna ut I med hjälp av parametriseringen $z(\theta) = e^{i\theta}$,

$\frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$,

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta}-a}\, ie^{i\theta}\,d\theta = \quad \text{v.g.v.}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}(\cos(\theta) - a - i\sin\theta)}{(\cos(\theta) - a + i\sin(\theta))(\cos(\theta) - a - i\sin(\theta))} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}(e^{-i\theta} - a)}{\cos^2(\theta) - 2a\cos(\theta) + a^2 + \sin^2(\theta)} d\theta$$

$$= i\int_0^{2\pi} \frac{1 - a\cos(\theta) - ia\sin(\theta)}{1 - 2a\cos(\theta) + a^2} d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{a\sin(\theta)}{1 - 2a\cos(\theta) + a^2} d\theta + i\int_0^{2\pi} \frac{1 - a\cos(\theta)}{1 - 2a\cos(\theta) + a^2} d\theta$$

Vi kan identifiera den eftersökta integralen som imaginärdelen i det sista uttrycket, och då $\text{Im}(I) = \text{Im}(2\pi i) = 2\pi$ fås

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 - a\cos(\theta)}{1 - 2a\cos(\theta) + a^2} d\theta = 2\pi. \quad \text{V.S.V.}$$

*

4.6.1, 4.6.2 och 4.6.4

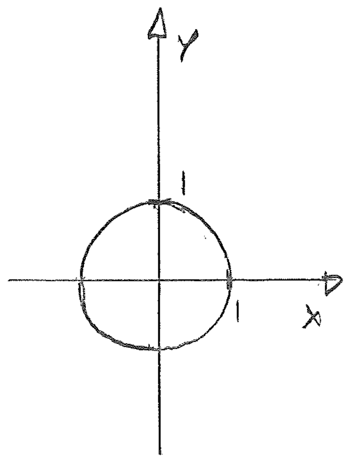
Använd Gauss medelvärdessats för att visa att

a) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}}\,d\theta = 1$ b) $\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos(\theta)}\cos(\sin(\theta))\,d\theta = 2\pi$

c) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a+\cos(n\theta)}{a^2+1+2a\cos(n\theta)}\,d\theta = \frac{2\pi}{a}$, $a>1$, $n\in\mathbb{Z}$

Lösningsförslag

a) Om $f(z) := e^z$ ser vi att integralen beräknar medelvärdet av f längs cirkeln $|z|=1$. Eftersom e^z är analytisk på och innanför denna kurva kan Gauss medelvärdessats användas,



$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}}\,d\theta = e^z\Big|_{z=\text{mittpunkten av cirkeln}=0} = e^0 = 1 \quad \text{v.s.v.}$$

v.g.v.

b) Från a har vi att

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{e^{i\theta}}\,d\theta = \left\{\begin{array}{l}\text{funktionen}\\ \text{är } 2\pi\text{-periodisk}\end{array}\right\} = \int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}}\,d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta)}\left(\cos(\sin\theta)+i\sin(\sin(\theta))\right)d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta)}\cos(\sin(\theta))\,d\theta + i\int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta)}\sin(\sin(\theta))\,d\theta$$

$= 2\pi$. Om vi identifierar realdelen på vardera sida om det sista likhetstecknet ser vi att

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta)}\cos(\sin(\theta))\,d\theta = 2\pi \quad \text{V.S.V.}$$

Dessutom har vi visat att

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta)}\sin(\sin(\theta))\,d\theta = 0$$

*

c) Om vi betraktar funktionen $f(z) = \frac{1}{z^n+a}$ så ser vi att f är analytisk på och innanför cirkeln $|z|=1$, om $a>1$ och n är ett heltal.

Gauss medelvärdessats ger därför att

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{e^{in\theta}+a}\,d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{z^n+a}\Big|_{z=\text{mittpunkten av cirkeln}=0} = \frac{2\pi}{0+a} = \frac{2\pi}{a}$$

Detta betyder att realdelen av ovanstående integral är $\frac{2\pi}{a}$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{e^{in\theta}+a}\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-in\theta}+a}{(e^{in\theta}+a)(e^{-in\theta}+a)}\,d\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a+\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)}{1+a^2+a\underbrace{(e^{in\theta}+e^{-in\theta})}_{=2\cos(n\theta)}}\,d\theta = \text{v.g.v.}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a + \cos(n\theta)}{a^2+1+2\cos(n\theta)}\, d\theta - i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n\theta)}{a^2+1+2\cos(n\theta)}\, d\theta = \frac{2\pi}{a}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a + \cos(n\theta)}{a^2+1+2\cos(n\theta)}\, d\theta = \frac{2\pi}{a} \qquad \text{v.s.v.}$$

Dessutom har vi visat att

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n\theta)}{a^2+1+2\cos(n\theta)}\, d\theta = 0.$$

*

4.6.10 Hitta maximum och minimum till $|z^2|$ i $R=\{z\in\mathbb{C} : |z-1-i|\le 2\}$ och ange var dessa värden antas.

*

Lösningsförslag

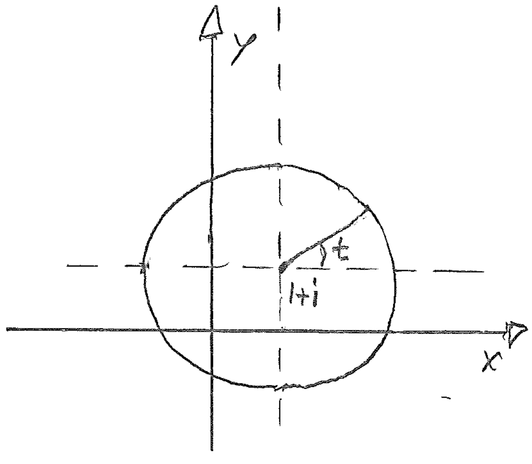
Eftersom z^2 är en analytisk funktion i det inre av R och kontinuerlig på hela R (som är begränsad), antas maximumvärdet av $|z|^2$ på randen till R enligt maximum modulus-satsen.

På randen, som ges av

$|z-1-i|=2$, kan z skrivas som

$z(t)=1+i+e^{it}$, $t\in\mathbb{R}$

*



v.g.v.

Detta ger

$$|z^2| = |z|^2 = |1+i+2e^{it}|^2 = (1+i+2e^{it})\overline{(1+i+2e^{it})} =$$

$$= (1+i+2e^{it})(1-i+2e^{-it})$$

$$= 6 + 2\underbrace{(e^{it}+e^{-it})}_{=2\cos(t)} + 2\cdot \underbrace{i(e^{-it}-e^{it})}_{=2\sin(t)} =$$

$$= 6 + 4(\cos(t)+\sin(t)) =: g(t).$$

Då g är slät och periodisk antar g max (och min) då $g'(t) = 4(-\sin(t)+\cos(t)) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

För $k=0$ fås $z = (1+\sqrt{2})(1+i)$ och

$$|z|^2 = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6 + 4\cdot\frac{2}{\sqrt{2}} = 6 + 4\sqrt{2}.$$

För $k=1$ fås $z = (1-\sqrt{2})(1+i)$ och

$$|z|^2 = g\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 6 + 4\cdot\left(\frac{-2}{\sqrt{2}}\right) = 6 - 4\sqrt{2}.$$

Med andra ord är maxvärdet av $|z^2|$ $6+4\sqrt{2}$ i R. V.g.v.

För att hitta minimum till $|z^2|$ skulle vi, på liknande sätt, vilja använda minimum modulus-satsen. Detta går dock ej då den kräver att $f(z)=z^2$ inte har några nollställen i R, vilket f har ty $f(0)=0$ och $0 \in R$.

Emellertid är $z=0$ en uppenbar unik minimipunkt till $|z^2|$ ty

$|z^2| \geq 0$ och $|z^2|=0 \Leftrightarrow z=0$

<u>Svar:</u> Maxvärdet antas i $z=(1+\sqrt{2})(1+i)$ och är $6+4\sqrt{2}$.
Minvärdet antas i $z=0$ och är 0.

——— * ———