Övning 8 i komplex analys

Förra gången: Kap 5.2, 5.4–5.7

- Taylorserier
- Laurentserier

*

IDAG: Kap 6.1–6.8

- Residykalkyl

Tal: 6.1.2, 6.3.28, 6.6.8, 6.8.2

*

Nästa gång:

Kap 6.12: – Argumentprincipen
– Rouchés sats

Kap 8.1–8.3: – Konforma avbildningar

s. 442–451 + 517–537

Singulariteter

Om $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ är

$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n$ principaldelen och

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ den analytiska delen.

Om $c_{-N} \neq 0$ för något heltal N och

$c_{-(N+1)} = c_{-(N+2)} = \ldots = 0$ är z_0 en

pol av ordning N.

Om principaldelen har oändligt många nollfrånskilda termer är z_0 en väsentlig singularitet.

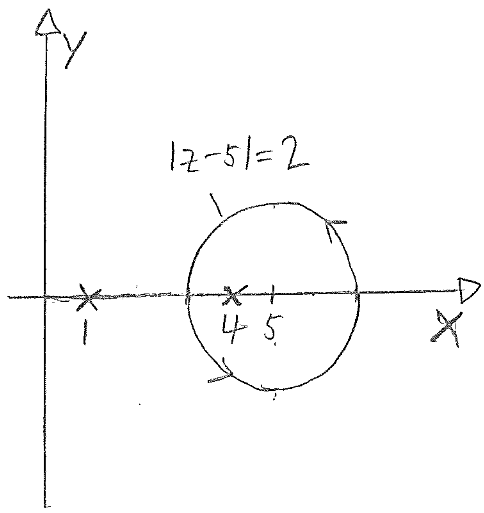
Om f har en isolerad singularitet i z_0, men kan definieras (eller omdefinieras) så att denna singularitet försvinner, är z_0 en hävbar singularitet.

6.1.2 Beräkna

$$I = \oint_{|z-5|=2} \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{i}{z-1} + 2(z-1) + \frac{3}{z-4}\, dz.$$

*

Lösningsförslag



Vi ser att integranden $f(z)$ har poler i $z=1$ och $z=4$, varav endast den senare ligger innanför $|z-5|=2$.

Residysatsen (Sats 2, sid. 339 i kursboken) ger

$$I = 2\pi i \cdot \text{Res}[f(z), 4] = \left\{ \begin{array}{l} z=4 \text{ pol av ordning } 1 \\ \text{regel I, sid. } 352 \end{array} \right\} =$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 4} \left[(z-4)\cdot\left(\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{i}{z-1} + 2(z-1) + \frac{3}{(z-4)} \right)\right] =$$

$$= 2\pi i \cdot (0+0+0+3) = 6\pi i$$

Svar: $I = 6\pi i$

*

<u>6.3.28</u> Beräkna

$$I = \oint_{|z|=2} \frac{\sinh(1/z)}{z-1}\, dz.$$

*

<u>Lösningsförslag</u>

Integranden $f(z) = \dfrac{\sinh(\frac{1}{z})}{z-1}$ är

analytisk i $\mathbb{C}$ förutom då

$z=0$ och $z=1$. Då dessa

punkter ligger innanför kurvan

som ges av $|z|=2$ ger Residy-

satsen (Sats 2, sid. 339 i kursboken)

att

$$I = 2\pi i \left(Res[f(z), 0] + Res[f(z), 1] \right)$$

v.g.v.

$z=1$ är en pol av ordning ett vilket ger

$$\text{Res}[f(z),1] = \lim_{z\to 1} (z-1)\frac{\sinh(\frac{1}{z})}{z-1} = \sinh(1).$$

För $z=0$ försöker vi skriva f som en laurentserie kring denna punkt, $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, och identifiera

$\text{Res}[f(z),0]$ som c_{-1},

$$\frac{\sinh(\frac{1}{z})}{z-1} = \frac{1}{z-1}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}+\dots\right) = \{|z|<1\} =$$

$$= -(1+z+z^2+\dots)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{3!z^3}+\dots\right) =$$

$$= \dots + \frac{(-1)}{z}\overbrace{\left(1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\dots\right)}^{\sinh(1)}+\dots = \text{v.g.v.}$$

$$= \ldots + \frac{(-1)\sinh(1)}{z} + \ldots$$

$$\Rightarrow \quad c_{-1} = -\sinh(1)$$

$$\Rightarrow \quad 2\pi i\left(\mathrm{Res}[f(z),1] + \mathrm{Res}[f(z),0]\right) =$$

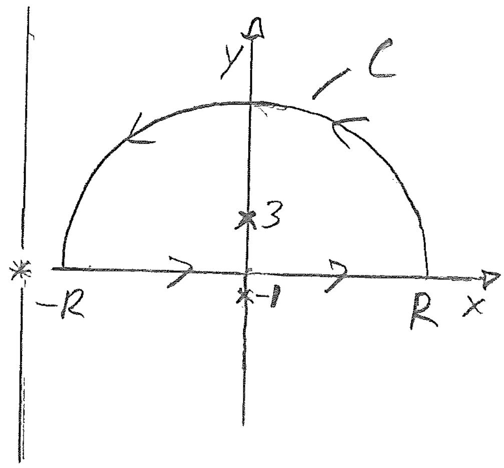
$$= 2\pi i\left(\sinh(1) - \sinh(1)\right) = 0$$

<u>Svar!</u> $I = 0$

6.6.8 Beräkna

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{i\frac{x}{3}}}{(x-i)^2+4}\,dx.$$

Lösningsförslag



Låt $f(z):=\dfrac{ze^{i\frac{z}{3}}}{(z-i)^2+4}$

och integrera f längs kurvan C (se figur).

Eftersom nämnaren $(z-i)^2+4=(z+i)(z-3i)$ och täljaren är frånskild noll i $z=-i$ och $z=3i$ ser vi att f har två poler av ordning ett, varav en ligger innanför C. Residysatsen ger

$$\oint_C f(z)=\int_{-R}^{R}f(x)\,dx+\int_{|z|=R}f(z)\,dz=2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),3i]$$

v.g.v.

Då $f(z) = \dfrac{z}{(z-i)^2+4} e^{i\frac{z}{3}}$ ser vi att

polynomet i täljaren har grad ett medan det i nämnaren har grad två.

Därför ger Jordans lemma (sid. 378 i kursboken) att

$$\lim_{R\to\infty} \int_{|z|=R} f(z)\,dz = 0$$

Vi får således

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x e^{i\frac{x}{3}}}{(x-i)^2+4}\,dx = I = 2\pi i \,\mathrm{Res}[f(z), 3i]$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{Regel I,} \\ \text{sid. 352} \end{matrix} \right\} = 2\pi i \lim_{z\to 3i} (z-3i) \frac{z e^{i\frac{z}{3}}}{(z-3i)(z+i)} =$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{3ie^{-1}}{4i} = \frac{3\pi i}{2e}$$

Svar: $I = \dfrac{3\pi i}{2e}$

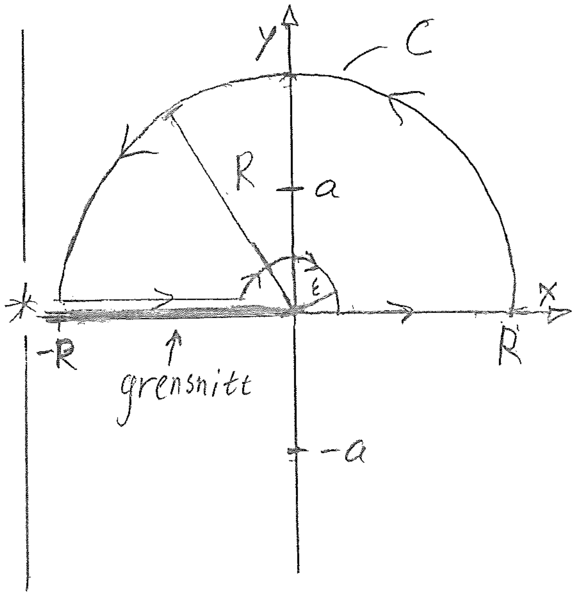
6.8.2 Visa att

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4a^3}\ln\left(\frac{a}{e}\right), \qquad a>0.$$

*

Lösningsförslag

Betrakta $f(z) := \dfrac{\mathrm{Log}(z)}{(z^2+a^2)^2}$ integrerad över den enkla slutna kurvan C (se figur).



Då $(z^2+a^2)^2 = (z+ia)^2(z-ia)^2$ ser vi att f har en pol av ordning två i punkten $z=ia$ som ligger innanför C. Detta ger

$$\oint_C \frac{\mathrm{Log}(z)}{(z^2+a^2)^2}\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{Log}(z)}{(z^2+a^2)^2}, ia\right] =$$

$$= \left\{\begin{array}{l}\text{Regel II,} \\ \text{Kap. 6.3, s. 353}\end{array}\right\} = 2\pi i \lim_{z\to ia} \frac{d}{dz}\left(\frac{(z-ia)^2 \cdot \mathrm{Log}(z)}{(z^2+ia^2)^2}\right) = \text{v.g.v.}$$

$$= 2\pi i \lim_{z \to ia} \frac{d}{dz} \frac{\text{Log}(z)}{(z+ia)^2} =$$

$$= 2\pi i \lim_{z \to ia} \frac{\frac{(z+ia)^2}{z} - \text{Log}(z)\, 2(z+ia)}{(z+ia)^4} =$$

$$= 2\pi i \left(\frac{1}{ia \cdot (2ia)^2} - \frac{2\,\text{Log}(ia)}{(2ia)^3} \right) =$$

$$= -\frac{\pi}{2a^3} + \frac{\pi \ln(a)}{2a^3} + i\frac{\pi^2}{4a^3} = \{ 1 = \ln(e) \} =$$

$$= \frac{\pi}{2a^3} \ln\left(\frac{a}{e}\right) + i\frac{\pi^2}{4a^3}.$$

Vänsterledet kan skrivas om,

$$\oint_C f(z)\,dz = \int_{\varepsilon}^{R} f(x)\,dx + \int_{|z|=R} f(z)\,dz + \int_{-R}^{-\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{|z|=\varepsilon} f(z)\,dz$$

$$=: I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

Vi kan visa att I_2 och I_4 går mot noll när $R \to \infty$ och $\varepsilon \to 0$,

v.g.v.

$$|I_2| = \left| \int_{|z|=R} \frac{\mathrm{Log}(z)}{(z^2+a^2)^2}\,dz \right| \leq \{\text{ML-olikheten}\} \leq$$

$$\leq \sup_{|z|=R} \left| \frac{\mathrm{Log}(z)}{(z^2+a^2)^2} \right| \cdot \overbrace{\int_{|z|=R} |dz|}^{=L} = \sup_{|z|=R} \left| \frac{\mathrm{Log}(z)}{(z^2+a^2)^2} \right| \cdot \pi R$$

$$\sup_{|z|=R} \left| \frac{\mathrm{Log}(z)}{(z^2+a^2)^2} \right| = \{ z = Re^{i\theta},\ 2k\pi \leq \theta \leq 2k\pi + \pi,\ k \in \mathbb{Z} \} =$$

$$= \sup_{0 \leq \theta \leq \pi} \frac{|\ln(R) + i\theta|}{|z^2+a^2|^2} \leq \left\{ \begin{array}{l} |z^2+a^2| \geq ||z|^2 - a^2| = |R^2 - a^2| \\ |\ln(R) + i\theta| \leq |\ln(R)| + |i\theta| \leq \ln(R) + \pi \end{array} \right\} \leq$$

principalgrenen av log

$$\leq \frac{\ln(R)+\pi}{|R^2-a^2|^2} \Rightarrow |I_2| \leq \frac{\ln(R)+\pi}{|R^2-a^2|^2} \cdot \pi R =$$

$$= \underbrace{\frac{\pi(R\ln(R) + \pi R)}{R^4}}_{\to 0,\ R \to \infty} \cdot \underbrace{\frac{1}{\left|1 - \left(\frac{a}{R}\right)^2\right|^2}}_{\to 1,\ R \to \infty} \to 0, \quad R \to \infty$$

$$|I_4| = \left| \int_{|z|=\varepsilon} \frac{\mathrm{Log}(z)}{(z^2+a^2)^2}\,dz \right|.$$ På denna kurva

är $z = \varepsilon e^{i\theta}$, $2k\pi \leq \theta \leq 2k\pi + \pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

och längden av kurvan är $\pi\varepsilon$.

$$\left|\frac{\text{Log}(z)}{(z^2+a^2)^2}\right| = \frac{|\ln(\varepsilon)+i\theta|}{|z^2+a^2|^2} \leq$$

principalgrenen av log

$$\leq \left\{ \begin{array}{l} |\ln(\varepsilon)+i\theta| \leq |\ln(\varepsilon)| + |i\theta| \leq |\ln(\varepsilon)| + \pi \\ |z^2+a^2| \geq ||z|^2-a^2| = |\varepsilon^2-a^2| \end{array} \right\} \leq$$

$$\leq \frac{|\ln(\varepsilon)|+\pi}{|\varepsilon^2-a^2|^2} \Rightarrow |I_4| \leq \{\text{ML-olikheten}\} \leq$$

$$\leq \frac{|\ln(\varepsilon)|+\pi}{|\varepsilon^2-a^2|^2} \cdot \pi\varepsilon = \underbrace{\frac{\pi}{|\varepsilon^2-a^2|^2}}_{\to \frac{\pi}{a^4},\ \varepsilon\to 0^+} \cdot \overbrace{(|\ln(\varepsilon)|+\pi)\cdot\varepsilon}^{\to 0,\ \varepsilon\to 0^+} \to 0,\ \varepsilon \to 0^+.$$

För I_3 har vi

$$I_3 = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\text{Log}(z)}{(z^2+a^2)^2}\,dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\ln|z|}{(z^2+a^2)}\,dz + i\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\arg(z)}{(z^2+a^2)}\,dz =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} z = x,\ x \text{ reellt} \\ \arg(z) = \pi \text{ då vi är "ovansidan" grensnittet} \end{array} \right\} =$$

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\ln|x|}{(x^2+a^2)^2}\,dx + i\pi\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \text{v.g.v.}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{integranderna är} \\ \text{jämna funktioner} \end{array} \right\} = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\ln(x)}{(x^2+a^2)^2}\,dx + i\pi \int_{\varepsilon}^{R} \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\,dx =$$

Sammantaget får vi

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0^+ \\ R \to \infty}} (I_1 + I_2 + I_3 + I_4) = \left\{ \begin{array}{l} I_2 \text{ och } I_4 \text{ går mot noll} \\ \text{då } \varepsilon \to 0^+ \text{ och } R \to \infty \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0^+ \\ R \to \infty}} (I_1 + I_3) =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0^+ \\ R \to \infty}} \left[\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\ln(x)}{(x^2+a^2)^2}\,dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\ln(x)}{(x^2+a^2)^2}\,dx + i\pi \int_{\varepsilon}^{R} \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\,dx \right)$$

$$= 2 \int_{0}^{\infty} \frac{\ln(x)}{(x^2+a^2)^2}\,dx + i\pi \int_{0}^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\,dx \Big)$$

$$= \operatorname{Res}[f(z), ia] = \frac{\pi}{2a^3} \ln\left(\frac{a}{e}\right) + i\,\frac{\pi^2}{4a^3}$$

V.g.v.

Om vi jämför real- och imaginär-
delarna ser vi att

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4a^3}\ln\left(\frac{a}{e}\right) \quad \text{v.s.v., och}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4a^3}$$

——————— * ———————