Övning 9 i komplex analys

Förra gången: Kap 6.1–6.8:

- Residykalkyl

IDAG: Kap 6.12:

- Argumentprincipen
- Rouchés sats

Kap 8.1–8.3:

- Konforma avbildningar

Tal: 6.12: 2, 4, 6, 10

8.2: 10

8.3: 2

Nästa gång: Kap. 8.4:

- Möbiusavbildningar

$\boxed{\text{s. } 537-555}$

6.12.2, 6.12.4 och 6.12.6

Teckna $f(z)$ i w-planet då z rör sig moturs runt de givna cirklarna. Bestäm också antalet poler och nollställen till f innanför dessa cirklar utan att använda argumentprincipen. Kontrollera svaren med hjälp av denna princip.

a) $f(z) = \frac{1}{z}$, $|z-2| = 3$

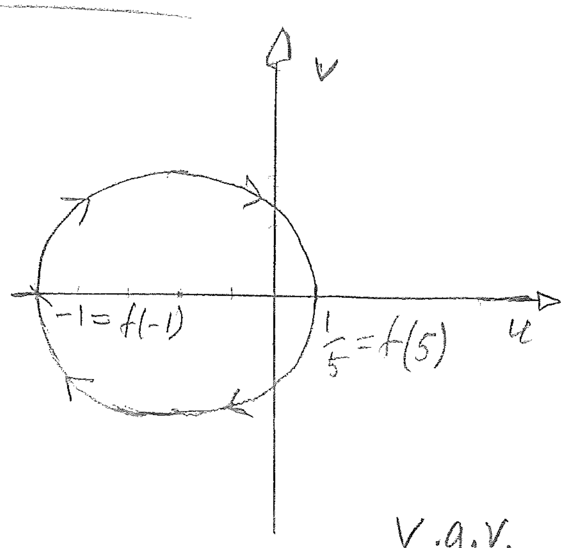
b) $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$, $|z| = 2$

c) $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$, $|z| = \frac{\pi}{2}$

*

Lösningsförslag

a) f har en pol i $z=0$ som ligger innanför $|z-2|=3$, och inga nollställen.



v.g.v.

För några värden på z fås figuren på föregående sida. Svaret stämmer överens med argumentprincipen då $\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg(f(z)) = \frac{1}{2\pi}\cdot(-2\pi) = -1$

där C ges av $|z-2|=3$

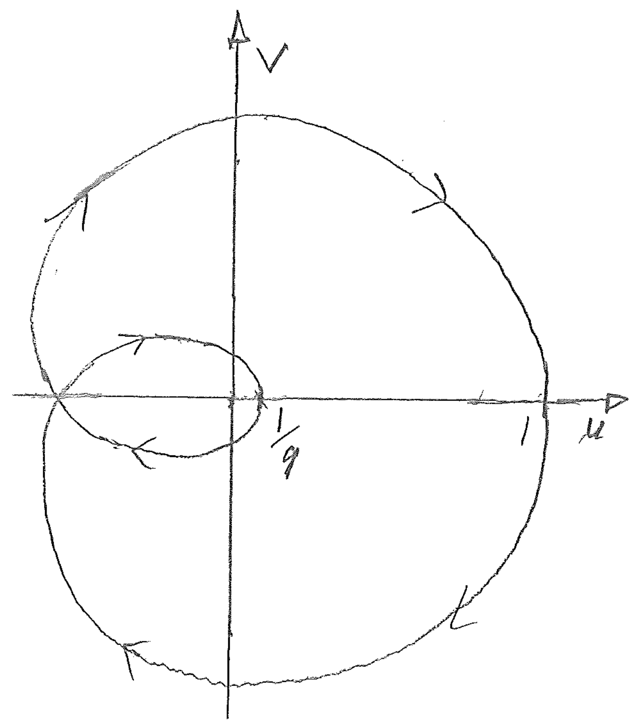
*

b) f har en pol av ordning två i punkten $z=1$ som ligger innanför kurvan C som ges av $|z|=2$.

Från figuren ser vi att

$\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg(f(z)) = \frac{1}{2\pi}\cdot(-4\pi) =$

$= -2$ så argumentprincipen stämmer överens även denna gång.



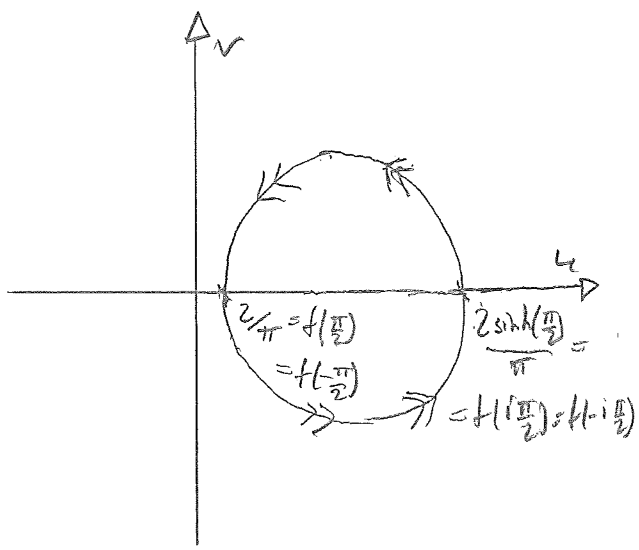
*

c) $z=0$ är en hävbar singularitet

för $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$, och $f(0) := \lim_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1 \neq 0.$

Det finns inte heller några nollställen eller poler till f innanför C, som ges av $|z| = \frac{\pi}{2}$. Tecknar vi f i w-planet får vi följande figur,

Kurvan genomlöps två gånger men origo omsluts inte, så $\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg(f(z)) = 0$ vilket stämmer med argumentprincipen.



6.12.10 Visa att alla nollställen till $p(z) = z^4 + z^3 + 1 = 0$ ligger innanför cirkeln $|z| = \frac{3}{2}$.

Lösningsförslag

Enligt algebrans fundamentalsats har $p(z)$ totalt fyra nollställen (inklusive multiplicitet). Låt nu $f(z) := z^4$ och $g(z) := z^3 + 1$. Då är $p(z) = f(z) + g(z)$. Dessutom är $|f(z)| - |g(z)| > 0$ på cirkeln $|z| = \frac{3}{2}$,

$$|f(z)| - |g(z)| = |z^4| - |z^3 + 1| \geq |z|^4 - |z|^3 - 1 =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^4 - \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 1 = \frac{11}{16} > 0.$$

Rouchés sats ger därför att $p(z)$ har lika många nollställen som $f(z)$ innanför $|z| = \frac{3}{2}$, vilket är fyra då $f(z) = z^4 = 0 \Leftrightarrow z = 0$. V.S.V.

<u>8.2.10</u> Visa att avbildningen $w = \frac{1}{z}$ avbildar linjen $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = 1\}$ på en cirkel. Ange centrum och radie för denna cirkel.

<u>Lösningsförslag</u>

$$w = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\underbrace{z \cdot \bar{z}}_{=|z|^2}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} = \{y=1\} =$$

$$= \underbrace{\frac{x}{x^2+1}}_{=:u} + i\underbrace{\frac{(-1)}{x^2+1}}_{=:v} = u + iv.$$

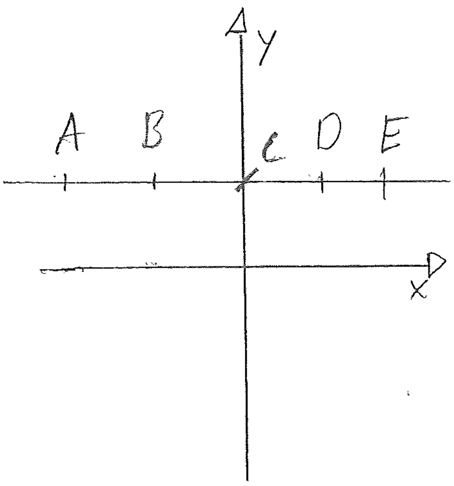
$$0 \neq v = -\frac{1}{x^2+1} \Leftrightarrow x^2+1 = -\frac{1}{v} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-1-\frac{1}{v}}$$

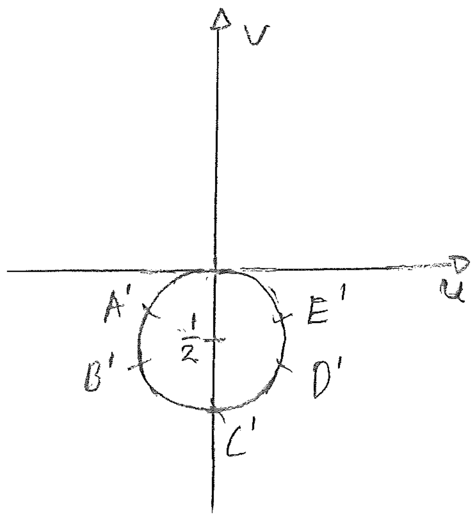
$$u = \frac{x}{x^2+1} = -xv = \mp v\sqrt{-1-\frac{1}{v}}$$

$$\Leftrightarrow u^2 = v^2\left(-1-\frac{1}{v}\right) = -v^2 - v = -\left(v+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow u^2 + \left(v+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

V.g.v.





Vi ser att den sista ekvationen beskriver en cirkel av radie $\frac{1}{2}$ med centrum i $w = -\frac{i}{2}$, och alla punkter antas förutom $w = 0$ (se figurerna ovan, där A avbildas på A', B på B' etc.). v.s.v.

8.3.2 a) Hitta bilden av $|\mathrm{Re}\, z| \leq a$, $0 < a < \frac{\pi}{2}$ under transformationen $w = \sin(z)$, genom att avbilda randen.

b) Är avbildningen injektiv?

c) Är avbildningen injektiv om $a = \frac{\pi}{2}$?

*

Lösningsförslag a) $\sin(z) = \sin(x+iy) =$

$= \{$ Ekvation 3.2-9, s. 109 i kursboken $\} =$

$= \underbrace{\sin(x)\cosh(y)}_{=:u} + i\underbrace{\cos(x)\sinh(y)}_{=:v} = u + iv$

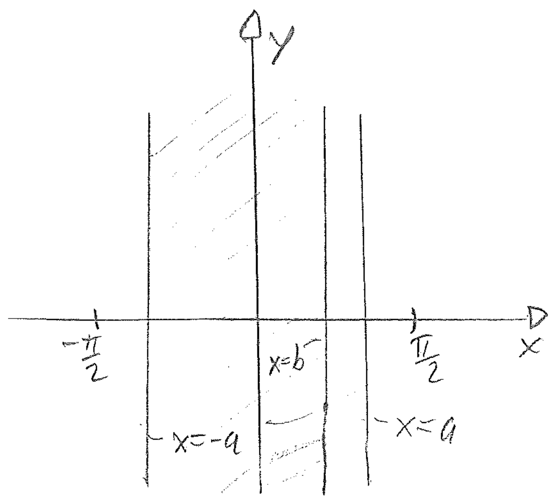
Om $x = a$ fås $\begin{cases} u = \sin(a)\cosh(y) \\ v = \cos(a)\sinh(y) \end{cases}$

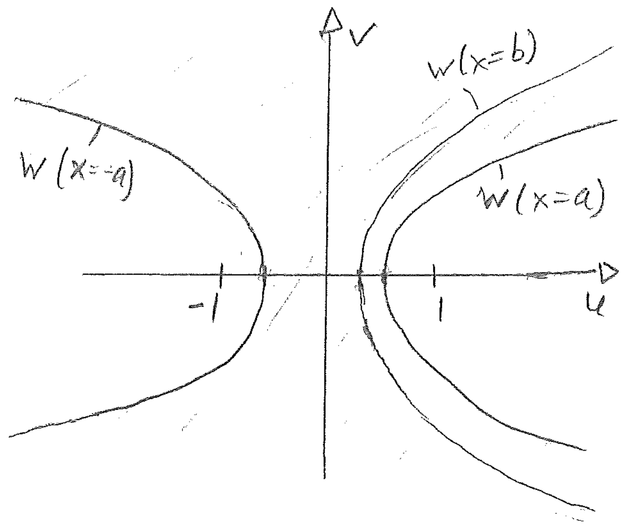
$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \sin(a) \neq 0 \\ \cos(a) \neq 0 \end{matrix} \text{ ty } 0 < a < \frac{\pi}{2} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{u}{\sin(a)}\right)^2 = \cosh^2(y) \\ \left(\frac{v}{\cos(a)}\right)^2 = \sinh^2(y) \end{cases}$

v.g.v.

$$\Rightarrow \frac{u^2}{\sin^2(a)} - \frac{v^2}{\cos^2(a)} = \cosh^2(y) - \sinh^2(y) = 1$$

Ekvationen $\frac{u^2}{\sin^2(a)} - \frac{v^2}{\cos^2(a)} = 1$ beskriver en hyperbel. Då $u = \underbrace{\sin(a)}_{>0}\cosh(y) > 0$ får vi delen av hyperbeln som ligger i högra halvplanet. För $x = -a$ fås samma hyperbel, men då $u = \sin(-a)\cosh(y) < 0$ får vi den vänstra delen istället.





V.g.V.

För fixerade x-värden mellan $-a$ och a ges på liknande sätt hyperbler som ligger "innanför" hyperbeln $\frac{u^2}{\sin^2(a)} - \frac{v^2}{\cos^2(a)} = 1$ (se figur på föregående sida).

---

b) Från a-delen ser vi att varje linje på formen $Re(z) = b$, $-a < b < a$ avbildas injektivt på $\frac{u^2}{\sin^2(a)} - \frac{v^2}{\cos^2(a)} = 1$, $u \geq 0$ om $b \geq 0$, $u < 0$ om $b < 0$.

Dessutom är bilden av varje sådan linje disjunkt från bilden av varje annan sådan linje. Med andra ord är transformationen w injektiv.

v.g.v.

---

c) För $a = \frac{\pi}{2}$ är w inte längre injektiv, ty $\sin(\frac{\pi}{2} + iy) = \sin(\frac{\pi}{2} - iy)$ för varje $y \in \mathbb{R}$,

$$u = \sin(\tfrac{\pi}{2})\cosh(y) = \sin(\tfrac{\pi}{2})\cosh(-y)$$

$$u = \cos(\tfrac{\pi}{2})\sinh(y) = \cos(\tfrac{\pi}{2})\sinh(-y) = 0.$$

*