Övning 2 i differentialekvationer

Förra gången:

Kap 2: • Första ordningens differentialekvationer

- Separation av variabler
- Integrerande faktor

*

Idag: Första ordningens DE:er

Kap 2.6: Exakta ekvationer

2.8: Existens och entydighet

Andra ordningens DE:er

3.5: Metoden med obestämda koefficienter

3.6: Variation av parametrar

*

Nästa gång:

Kap 5.1–5.5: Serielösningar

s. 247–288

*

Repetition 1:a ordningens DE:er

$$y' = f(x,y)$$

Om $\quad y' = f(x,y) = g(x)h(y)\quad$ är DE:en separabel, och om

$$y' = h(y)$$

är DE:en autonom.

$*$

Om DE:en kan skrivas som

$$y' + p(x)y = g(x)$$

kan vi multiplicera med en integrerande faktor μ,

$$\mu y' + \mu p y = \mu g$$

$$\| \;\{\text{vill ha}\}$$

$$\| $$

$$(\mu y)' \quad \Rightarrow \quad \mu \text{ löser } \mu' = \mu p$$

som är separabel.

$*$

2.6.1 Bestäm huruvida

$$4x+3+(6y-1)y'=0 \qquad (1)$$

är exakt. Hitta i sådana fall lösningen.

Lösningsförslag

(1) är exakt om

$$\frac{\partial}{\partial y}(4x+3)=\frac{\partial}{\partial x}(6y-1),$$

vilket är sant ty

$$\frac{d}{dy}(4x+3)=0=\frac{d}{dx}(6y-1).$$

Därmed existerar det en funktion ψ så att

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\psi(x,y)=4x+3 & (2) \\ \frac{\partial}{\partial y}\psi(x,y)=6y-1 & (3) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow \psi(x,y) = 2x^2 + 3x + h(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\psi(x,y) = h'(y) = \{(3)\} = 6y - 1$$

$$\Rightarrow \quad h(y) = 3y^2 - y \ (+C)$$ Kan skippas i detta fall

$$\Rightarrow \quad \psi(x,y) = 2x^2 + 3x + 3y^2 - y$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\psi(x, y(x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \psi(x, y(x)) = D$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 + 3x + 3y^2(x) - y(x) = D$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2(x) - \frac{1}{3}y(x) + \frac{2}{3}x^2 + x - D = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x) = \frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{36} + D - \frac{2}{3}x^2 - x}$$

<u>Svar:</u> $y(x) = \frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{36} + D - \frac{2}{3}x^2 - x}$

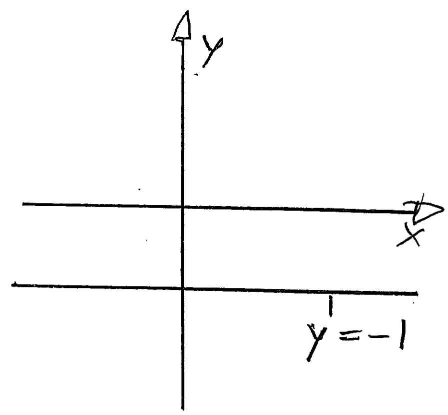
1.6 Teoridelen

Antag att $f(x,y) = \dfrac{x}{1+y^3}$. För vilka x_0 och y_0 garanterar Sats 1 (2.4.2 i boken) att det finns en unik lösning till

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Lösningsförslag

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{3xy^2}{(1+y^3)^2}.$$



Från detta ser vi att f och $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ är kontinuerliga när $1+y^3 \neq 0 \Leftrightarrow y \neq -1$. Sats 2.4.2 ger därmed att det finns en unik lösning i ett intervall (x_0-h, x_0+h), $h>0$, då $y_0 \neq -1$.

Svar: $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \neq -1$.

3.5.8 Lös

$$y'' + 2y' + y = 4e^{-t} \quad (1)$$

Lösningsförslag

1) Lös den homogena ekvationen

$$y'' + 2y' + y = 0 \quad (2)$$

(2) har den karakteristiska ekvationen

$$r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2 = 0 \Leftrightarrow r = -1$$

$\Rightarrow$ En fundamentalmängd av lösningar till (2) ges av

e^{-t} och te^{-t}

$\Rightarrow$ Den allmänna lösningen till (2) kan skrivas som

$$y_h(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}$$

2) Hitta en partikulärlösning till (1): metoden med obestämda koefficienter ger ansatsen

$$y_p(t) = Dt^2 \cdot e^{-t}$$

Vi får

$$y_p'(t) = 2Dte^{-t} - Dt^2e^{-t}$$

$$y_p''(t) = 2De^{-t} - 2Dte^{-t} - 2Dte^{-t} + Dt^2e^{-t}$$
$$= (2-4t+t^2)De^{-t}$$

Sätt in i (1):

$$(2-4t+t^2)De^{-t} + 2(2Dte^{-t} - Dt^2e^{-t}) + Dt^2e^{-t}$$
$$= (2 \cancel{-4t} \cancel{+t^2} \cancel{+4t} \cancel{-2t^2} \cancel{+t^2})De^{-t}$$
$$= 2De^{-t} = 4e^{-t} \Leftrightarrow D = 2$$

<u>Svar</u>: $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$
$$= C_1e^{-t} + C_2te^{-t} + 2t^2e^{-t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

3.6.5 Lös

$$y'' + y = 2\tan(t), \quad (1)$$
$$0 < t < \frac{\pi}{2}$$

Lösningsförslag

1) Hitta lösningen till den homogena ekvationen

$$y'' + y = 0 \quad (2)$$

Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2 + 1 = 0 \iff r = \pm i.$$

$\Rightarrow$ En fundamentalmängd av lösningar till (2) ges av $\cos t$ och $\sin t$.

$\Rightarrow$ Den allmänna lösningen till (2) kan skrivas som

$$y_h(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2) Hitta en partikulärlösning till (1):
med variation av parametrar
ansätter vi en lösning som

$$y_p(t) = u_1(t)\cos t + u_2(t)\sin t$$

Då fås

$$y_p' = -u_1 \sin t + u_2 \cos t$$
$$+ \underbrace{u_1'\cos t + u_2'\sin t}_{\text{sätt till noll (3)}}$$

Vidare fås

$$y_p'' = -u_1 \cos t - u_2 \sin t$$
$$-u_1'\sin t + u_2'\cos t$$

sätt in detta i (1):

$$y_p'' + y_p = \cancel{-u_1\cos t} \cancel{-u_2\sin t} - u_1'\sin t$$
$$+u_2'\cos t + \cancel{u_1\cos t} + \cancel{u_2\sin t} \quad (4)$$
$$= 2\tan t$$

(3) och (4) ger det linjära systemet

$$\begin{cases} \cos t\, u_1' + \sin t\, u_2' = 0 \\ -\sin t\, u_1' + \cos t\, u_2' = 2\tan t \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 2\tan t \end{array}\right)$$

Lösningen till detta system ges av

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin t \\ 2\tan t & \cos t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix}} = -2\tan t \sin t$$

$$= -2\frac{(1-\cos^2 t)}{\cos t} = \frac{-2}{\cos t} + 2\cos t$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} \cos t & 0 \\ -\sin t & 2\tan t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix}} = 2\sin t$$

Från detta fås

$$u_1 = -2\int \frac{1}{\cos t}\,dt + 2\int \cos t\,dt$$

$$= -2\int \frac{1}{\cos t}\,dt + 2\sin t \;(+D_1) =$$

$$\int \frac{1}{\cos t}\,dt = \left\{ \begin{array}{l} \tan\frac{t}{2} = x, \quad t = 2\arctan x \\ \frac{dt}{dx} = \frac{2}{1+x^2}, \end{array} \right.$$

$$\left. \cos t = \frac{\cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2} + \sin^2\frac{t}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{t}{2}}{1+\tan^2\frac{t}{2}} = \frac{1-x^2}{1+x^2} \right\}$$

$$= \int \frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{2}{1+x^2}\,dx = 2\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = 2\int \frac{1}{(1-x)(1+x)}\,dx$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{partialbråksuppdelning via} \\ \text{handpåläggning} \end{array} \right\} =$$

$$= 2\int \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}\,dx = -\ln(1-x) + \ln(1+x) \;(+D_2)$$

$$= \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln\left(\frac{1+\tan(\frac{t}{2})}{1-\tan(\frac{t}{2})}\right)$$

$$= 2\ln\left(\frac{1-\tan\frac{t}{2}}{1+\tan\frac{t}{2}}\right) + 2\sin t$$

$$u_2 = 2\int \sin t = -2\cos t \ (+D_3)$$

$$\Rightarrow y_p(t) = \left(2\ln\left(\frac{1-\tan\frac{t}{2}}{1+\tan\frac{t}{2}}\right) + \cancel{2\sin t}\right)\cos t$$

$$- \cancel{2\cos t}\sin t$$

$$= 2\ln\left(\frac{1-\tan\frac{t}{2}}{1+\tan\frac{t}{2}}\right)\cos t$$

Den allmänna lösningen till (1) ges av

<u>Svar:</u> $y(t) = y_h(t) + y_p(t) =$

$$= C_1\cos t + C_2\sin t + 2\ln\left(\frac{1-\tan(\frac{t}{2})}{1+\tan(\frac{t}{2})}\right)\cos t,$$

$$0 < t < \frac{\pi}{2}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

—— * ——