Övning 4 i differentialekvationer

Förra gången:

Kap 5: Potensserielösningar

*

Idag: Kap 6: Laplacetransformen

Tal: 6.1.5a, 6.4.5, 6.5.2, 6.6.6, 6.6.17

*

Nästa gång:

Kap 7: System av 1:a ordningens linjära DE:er

*

Repetition

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Om p och q är analytiska i x_0, d.v.s. x_0 är en ordinär punkt, ansätt y som

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

Om x_0 är en reguljär singulär punkt (se boken för definition), ansätt y som

$$y(x) = (x-x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \quad x-x_0 \geq 0$$

*

Laplacetransformen

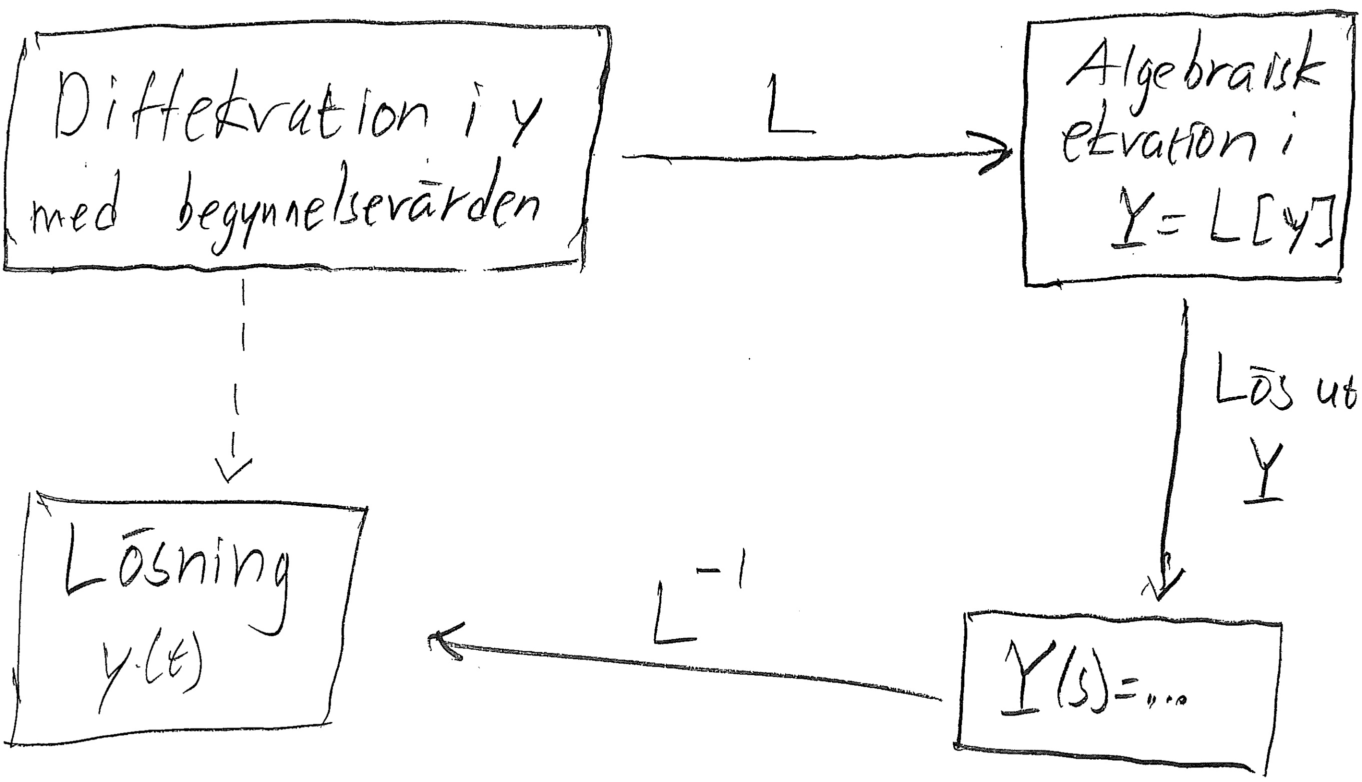
Laplacetransformen kan användas till att lösa andra ordningens linjära begynnelsevärdesproblem med konstanta koefficienter,

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f \\ y(0) = y_0, \; y'(0) = y_1 \end{cases}$$

Variation av parametrar kan också användas om f är kontinuerlig. Är f diskontinuerlig är Laplacetransformen att föredra.

Nyckelegenskapen är att Laplacetransformen omvandlar derivator till multiplikation med s.

Ex: $L[y'](s) = sY(s) - y_0$


Diffekvation i y med begynnelsevärden
L
Algebraisk ekvation i Y = L[y]
Lös ut Y
Y(s) = ...
L⁻¹
Lösning y(t)

6.1.5a Hitta Laplacetransformen till

$$f(t) = t$$

——— * ———

Lösningsförslag

$$\mathcal{L}[f](s) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} t \, dt =$$

$$= \left[\frac{e^{-st}}{(-s)} t \right]_{t=0}^{\infty} - \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{(-s)} \cdot 1 \, dt = \{ s > 0 \}$$

$$= 0 + \left[\frac{e^{-st}}{(-s^2)} \right]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s^2}$$

Svar: $F(s) = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0.$

——— * ———

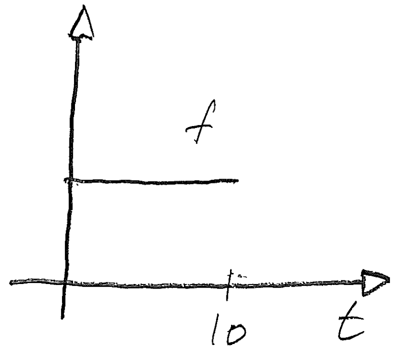
6.4.5 Lös

$$\begin{cases} y''+3y'-2y = f(t) & (1) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 10 \\ 0, & t \ge 10 \end{cases}$$

Lösningsförslag

f kan skrivas som $1-\theta(t-10)$ där θ är stegfunktionen,



$$\theta(r) = \begin{cases} 0, & r < 0 \\ 1, & r \ge 0 \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \quad L[y''+3y'+2y] = L[f] = L[1] - L[\theta(t-10)]$$

$$VL = L[y''] + 3L[y'] + 2L[y] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{BETA L7 och L8} \\ L[y'] = sY(s) - \underbrace{y(0)}_{=0};\ L[y''] = s^2Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{=0} - \underbrace{y'(0)}_{=0} \end{array} \right\}$$

$$= s^2 Y(s) + 3s\,Y(s) + 2\,Y(s) = Y(s)(s^2+3s+2)$$

$$= HL = L[1] - L[\theta(t-10)]$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{BETA} \quad L18: \quad L[1] = \frac{1}{s} \\ \qquad\qquad L19: \quad L[\theta(t-T)] = \frac{e^{-Ts}}{s} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s(s^2+3s+2)} - \frac{e^{-10s}}{s(s^2+3s+2)}$$

$$s^2+3s+2 = (s+1)(s+2)$$

Partialbråksuppdelning (BETA s. 120)

$$\frac{1}{s(s^2+3s+2)} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Handpåläggning} \\ A = \frac{1}{2},\ B = -1,\ C = \frac{1}{2} \end{array} \right\} = \frac{1}{2s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2(s+2)}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{2s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2(s+2)} - \left[\frac{e^{-10s}}{2s} - \frac{e^{-10s}}{s+1} + \frac{e^{-10s}}{2(s+2)} \right]$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{BETA} \\ L2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

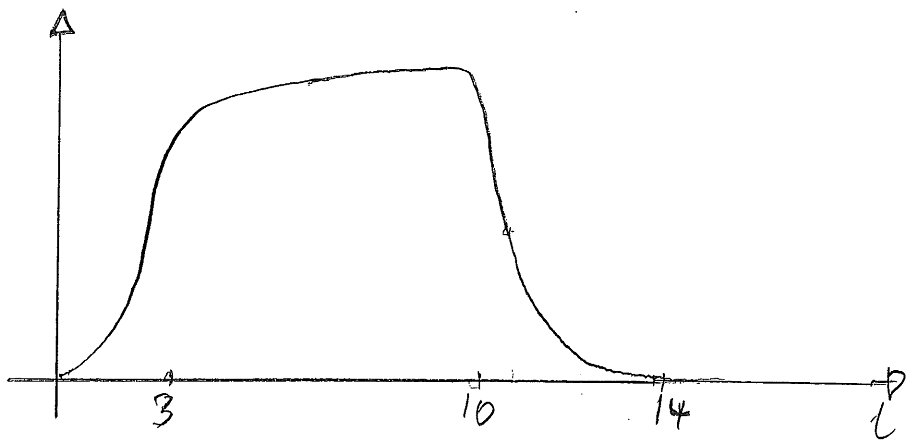
$$\mathcal{L}^{-1}[Y] = y = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]$$

$$- \left[\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-10s}}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-10s}}{s+1}\right] + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-10s}}{s+2}\right]\right]$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{BETA} & L18: & \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = t \\ & L21: & \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right] = e^{-at} \\ & L4: & \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-Ts}F(s)\right] = \theta(t-T)\,f(t-T) \end{matrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{e^{-2t}}{2} - \theta(t-10)\left(\frac{1}{2} - e^{-(t-10)} + \frac{e^{-2(t-10)}}{2}\right)$$

$= \underline{\text{Svar}}$



6.5.2 Lös

$$\begin{cases} y'' + 4y = \delta(t-\pi) - \delta(t-2\pi) & (1) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Lösningsförslag

$$(1) \Rightarrow L[y''] + 4L[y] = L[\delta(t-\pi)] - L[\delta(t-2\pi)]$$

$$VL = \left\{ \text{BETA L8: } L[y''] = s^2 Y - s\underbrace{y(0)}_{=0} - \underbrace{y'(0)}_{=0} \right\}$$

$$= s^2 Y + 4Y = Y(s^2+4)$$

$$HL = \left\{ \text{BETA L16: } L[\delta(t-T)] = e^{-Ts} \right\} = e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2+4} - \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+4}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2e^{-\pi s}}{s^2+4} - \frac{2e^{2\pi s}}{s^2+4} \right)$$

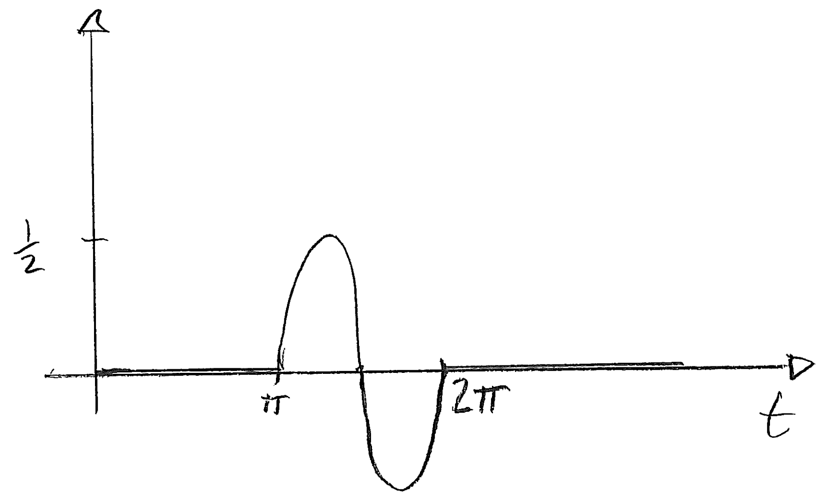
$$\Rightarrow y(t) = \left\{ \begin{array}{l} \text{BETA } L4: \mathcal{L}^{-1}[e^{-Ts}F(s)] = f(t-T)\theta(t-T) \\ \qquad L24: \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right] = \sin(at) \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2e^{-\pi s}}{s^2+4}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2e^{-2\pi s}}{s^2+4}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin(2(t-\pi))\theta(t-\pi) - \sin(2(t-2\pi))\theta(t-2\pi)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin(2t)\theta(t-\pi) - \sin(2t)\theta(t-2\pi)\right)$$

$$= \frac{\sin(2t)}{2}\left(\theta(t-\pi) - \theta(t-2\pi)\right) = \underline{\text{Svar}}$$



——— * ———

6.6.6 Hitta Laplacetransformen till

$$f(t) = e^{-t} * \sin t = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \sin(\tau)\,d\tau$$

Lösningsförslag

$$L[f] = L[e^{-t} * \sin t] = \left\{ \begin{array}{l} \text{BETA L12} \\ L[g*h](s) = G(s)H(s) \end{array} \right\}$$

$$= L[e^{-t}] \cdot L[\sin t] = \left\{ \begin{array}{l} \text{BETA} \\ L21: L[e^{-at}] = \frac{1}{s+a} \\ L24: L[\sin at] = \frac{a}{s^2+a^2} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)}$$

Svar: $L[f](s) = \dfrac{1}{(s+1)(s^2+1)}$

6.6.17 Uttryck lösningen till

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = g(t), & (1) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -2 \end{cases}$$

med hjälp av faltning.

Lösningsförslag

$$(1) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{BETA} \\ L7: \; L[y'] = sY - \overbrace{y(0)}^{=1} \\ L8: \; L[y''] = s^2 Y - s\underbrace{y(0)}_{=1} - \underbrace{y'(0)}_{=-2} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad s^2 Y - s + 2 + 4sY - 4 + 4Y = L[g](s) = G(s)$$

$$\Leftrightarrow \quad Y \underbrace{(s^2 + 4s + 4)}_{=(s+2)^2} = G(s) + s + 2$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{G(s)}{(s+2)^2} + \frac{s}{(s+2)^2} + \frac{2}{(s+2)^2}$$

$$= \frac{G(s)}{(s+2)^2} + \frac{s+2}{(s+2)^2} = \frac{G(s)}{(s+2)^2} + \frac{1}{s+2}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{BETA} \\ L21: \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right] = e^{-at} \\ L22: \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}\right] = t^n e^{-at} \\ L12: \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)H(s)\right] = \int_0^t g(\tau)h(t-\tau)\,d\tau \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \int_0^t g(t-\tau)\,\tau e^{-2\tau}\,d\tau + e^{-2t} = \underline{\text{Svar}}$$

——— * ———