Övning 5 i differentialekvationer

Förra gången:

Kap 6: Laplacetransformen

Idag: Kap 7.1, 7.4–7.6

System av 1:a ordningens linjära DE:er

Nästa gång: Kap 7.7–7.9

Forts. system av 1:a ordningens linjära DE:er.

Repetition

Laplacetransformen: $L[f] = F$

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

Bra verktyg för linjära BV-problem med konstanta koefficienter och diskontinuerliga icke-homogeniteter

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f \leftarrow \text{diskontinuerlig} \\ y(0) = y_0 \quad y'(0) = y_1 \end{cases}$$

(1.6)

7.1.5 Gör om

$$\begin{cases} u'' + 2u' + 4u = 2\cos(3t) & (1) \\ u(0) = 1, \quad u'(0) = -2 \end{cases}$$

till ett system av 1:a ordningens BV-problem.

Lösningsförslag

Låt $x_1 := u$, $x_2 := u'$. Då fås

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = u'' = \{(1)\} = -4x_1 - 2x_2 + 2\cos(3t) \\ x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = -2 \end{cases}$$

*

7.4.5 Visa att den allmänna lösningen till

$$\bar{x}' = \bar{\bar{P}}(t)\bar{x} + \bar{g}(t) \quad (1)$$

är summan av en godtycklig partikulärlösning $\bar{x}^{(p)}$ till (1) och den allmänna lösningen $\bar{x}^{(h)}$ till motsvarande homogena ekvation

$$\bar{x}' = \bar{\bar{P}}(t)\bar{x} \quad (2)$$

Lösningsförslag

Låt $\bar{x}$ lösa (1) och betrakta

$$\bar{y} := \bar{x} - \bar{x}^{(p)}.$$

Vi får

$$\bar{y}' = \bar{x}' - \bar{x}'^{(p)} = \bar{\bar{P}}(t)\bar{x} + \underline{g}(t) - \bar{\bar{P}}(t)\bar{x}^{(p)} - \underline{g}(t)$$

$$= \bar{\bar{P}}(t)(\bar{x} - \bar{x}^{(p)}) = \bar{\bar{P}}(t)\bar{y},$$

d.v.s. $\bar{y}$ är en lösning till (2) och innefattas i

$$\bar{x}^{(h)} = c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 + \ldots + c_n\bar{x}_n$$

där $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$ utgör en fundamentalmängd till (2).

Därför innefattas $\bar{x}$ i $\bar{x}^{(p)} + \bar{x}^{(h)}$ och då detta gäller för varje given lösning $\bar{x}$, är den allmänna lösningen till (1)

$$\bar{x}^{(p)} + \bar{x}^{(h)}.$$

*

<u>7.4.6</u> Betrakta vektorerna

$$\bar{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$$

a) Beräkna Wronskideterminanten.

b) I vilka intervall är $\bar{x}^{(1)}$ och $\bar{x}^{(2)}$ linjärt oberoende?

c) Hitta det homogena DE-systemet som $\bar{x}^{(1)}$ och $\bar{x}^{(2)}$ löser.

<u>Lösningsförslag</u>

a) $W[\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}] = \begin{vmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} = 2t^2 - t^2 = t^2$

b) $W[\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}] = 0 \Leftrightarrow t \neq 0$

$\Rightarrow$ $\bar{x}^{(1)}$ och $\bar{x}^{(2)}$ är linjärt oberoende på alla intervall.

c) Sats 7.4.3 säger att om $\bar{x}^{(1)}$ och $\bar{x}^{(2)}$ löser samma ekvation

$$\bar{x}' = \bar{\bar{P}}(t)\bar{x}$$

i ett intervall I, och $\bar{\bar{P}}$ är kontinuerlig, så är $W[\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}]$ identiskt lika med noll, eller frånskilt noll för alla $t \in I$. Alltså är $\bar{\bar{P}}(t)$ diskontinuerlig i $t=0$ eftersom $W[\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}](0) = 0$, men $W[\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}](t) \neq 0,\ t \neq 0.$

Antag att $\bar{x}^{(1)}$ och $\bar{x}^{(2)}$ löser samma homogena system

$$\bar{x}' = \bar{\bar{P}}(t)\bar{x}$$

Då uppfyller <u>fundamentalmatrisen</u>

$$\overline{\Psi} := \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ \overline{x}^{(1)} & \overline{x}^{(2)} \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{pmatrix}$$

följande matrisdifferentialekvation,

$$\overline{\Psi}' = \overline{P}(t)\,\overline{\Psi}$$

$$\Rightarrow \left\{ \overline{\Psi}^{-1} \text{ existerar om } t \neq 0,\ \overline{\Psi}^{-1} = \frac{1}{t^2}\begin{pmatrix} 2t & -t^2 \\ -1 & -t \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{P}(t) = \overline{\Psi}'\,\overline{\Psi}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{t^2} \begin{pmatrix} 2t & -t^2 \\ -1 & t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix}$$

DE-systemet som $\overline{x}^{(1)}$ och $\overline{x}^{(2)}$ är alltså, för $t \neq 0$,

$$\overline{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix} \overline{x}, \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\frac{2}{t^2} x_1 + \frac{2}{t} x_2 \end{cases}$$

*

7.5.5 a) Hitta den allmänna lösningen till

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \bar{x} \qquad (1)$$

och beskriv beteendet då $t \to \infty$.

b) Teckna några trajektorior

Lösningsförslag

Ansätt lösningen som

$$\bar{x}(t) = \bar{k} e^{rt}$$

där $\bar{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ är en konstant vektor.

Låt även

$$\bar{\bar{A}} := \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Vi har tre obekanta: r, k_1 och k_2.

Vi får

$$\bar{x}' = r\bar{k}e^{rt} = \{(1)\}$$

$$= \bar{\bar{A}}\bar{k}e^{rt}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\bar{\bar{A}} - r\bar{\bar{I}})\bar{k}e^{rt} = \bar{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\bar{\bar{A}} - r\bar{\bar{I}})\bar{k} = \bar{0} \qquad (2)$$

(2) har icke-triviala lösningar omm

$$\det(\bar{\bar{A}} - r\bar{\bar{I}}) = 0$$

(2) känner vi igen som ett egenvärdesproblem. Vi börjar med att hitta egenvärdena.

$$\det(\bar{\bar{A}} - r\bar{\bar{I}}) = \begin{vmatrix} -2-r & 1 \\ 1 & -2-r \end{vmatrix} = (r+2)^2 - 1 = 0$$

$\Leftrightarrow \quad r_1 = -1, \quad r_2 = -3$

Sätt in detta i (2) för att hitta motsvarande egenvektorer.

<u>$r_1 = -1$</u>

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Leftrightarrow \quad k_1 = k_2$ så $\bar{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_1 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

För $k_1 = 1$ fås egenvektorn $\bar{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vilket ger en lösning

$$\bar{x}_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$\underline{r_2 = -3}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow k_2 = -k_1. \text{ För } k_1 = 1$$

fås egenvektorn $\bar{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ en andra lösning är

$$\bar{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

Sats 7.4.3 ger att $\bar{x}^{(1)}$ och $\bar{x}^{(2)}$ är linjärt oberoende i $\mathbb{R}$,

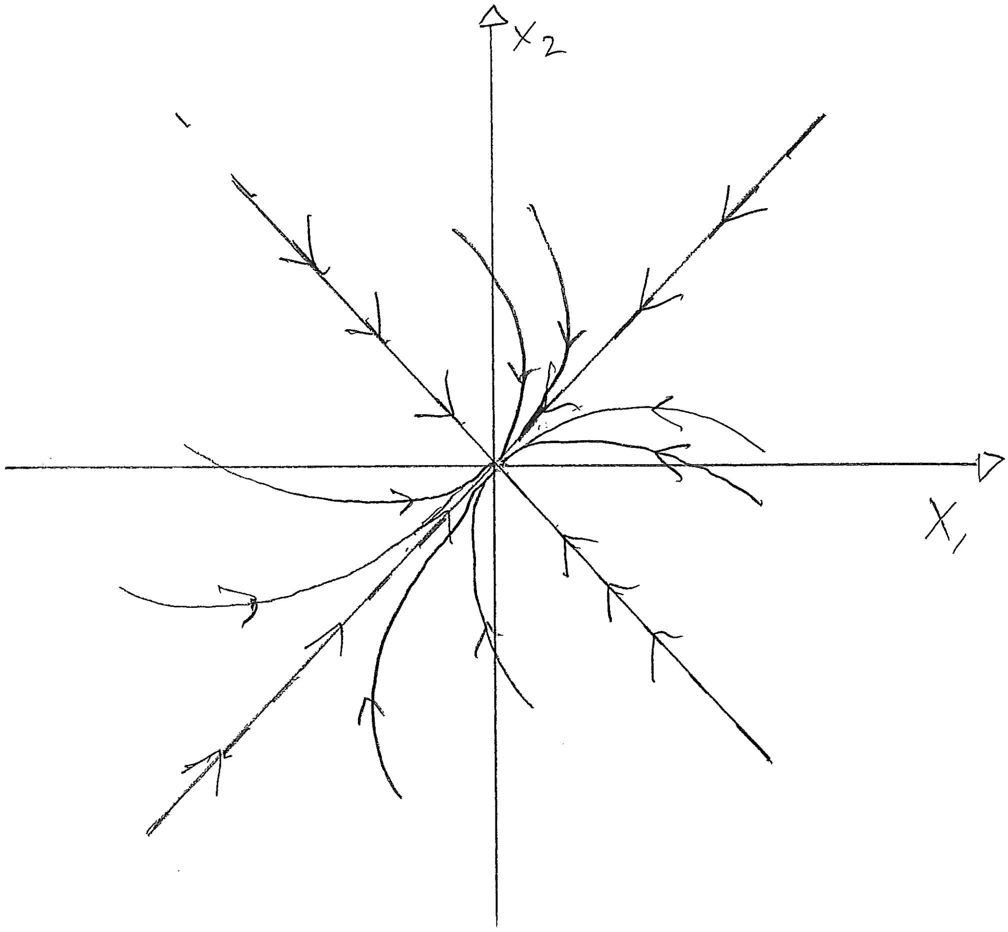
$$W[\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}] = \begin{vmatrix} e^{-t} & e^{-3t} \\ e^{-t} & -e^{-3t} \end{vmatrix} = -2e^{-4t} \neq 0 \ \forall t$$

Sats 7.4.2 ger därför att den allmänna lösningen till (1) är

<u>Svar:</u> $\bar{x} = c_1\bar{x}^{(1)} + c_2\bar{x}^{(2)} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-3t},$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,

b)



$$\bar{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

$$= e^{-t} \left(c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} \right)$$

När $t \to \infty$ går lösningen mot origo, som är en <u>asymptotiskt stabil nod.</u>

7.6.6^T a) Lös

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \bar{x}$$

och ange svaret i reellvärda funktioner.

b) Teckna några trajektorior.

---------- * ----------

Lösningsförslag

På samma sätt som tidigare vill vi hitta egenvärdena till

$$\bar{\bar{A}} := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\det(\bar{\bar{A}} - r\bar{\bar{I}}) = \begin{vmatrix} 1-r & 2 \\ -5 & -1-r \end{vmatrix} = (1-r)(-1-r)+10$$

$$= r^2 - 1 + 10 = r^2 + 9 = 0$$

$\Leftrightarrow \quad r_1 = 3i \, , \quad r_2 = \bar{r}_1 = -3i$

Egenvektorerna hittas via ekvationen

$$(\bar{\bar{A}} - r\bar{\bar{I}})\bar{k} = \bar{0}.$$

<u>$r = 3i$:</u>

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-3i & 2 & 0 \\ -5 & -1-3i & 0 \end{array}\right) \cdot (1+3i)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 10 & 2(1+3i) & 0 \\ -5 & -1-3i & 0 \end{array}\right) \tfrac{1}{2} \cdot r_1 \sim \left(\begin{array}{cc|c} 10 & 2(1+3i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Leftrightarrow k_1 = \dfrac{-3i-1}{5} k_2$. För $k_2 = 5$ fås

$$\bar{k} = \begin{pmatrix} -3i-1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ lösning

$$\bar{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} -3i-1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{3it} = \begin{pmatrix} -3i-1 \\ 5 \end{pmatrix} (\cos(3t) + i\sin(3t))$$

Realdel och imaginärdel utgör två linjärt oberoende lösningar,

$$\begin{pmatrix} -3i-1 \\ 5 \end{pmatrix}\left(\cos(3t)+i\sin(3t)\right) =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\left(\cos(3t)+i\sin(3t)\right)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}\cos(3t) + i\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}\sin(3t)$$
$$+ i\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}\cos(3t) - \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}\sin(3t)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}\cos(3t) + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\sin(3t)$$
$$+ i\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}\sin(3t) - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\cos(3t)\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 3\sin(3t)-\cos(3t) \\ 5\cos(3t) \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -3\cos(3t)-\sin(3t) \\ 5\sin(3t) \end{pmatrix}$$

Svar a): Den allmänna lösningen ges

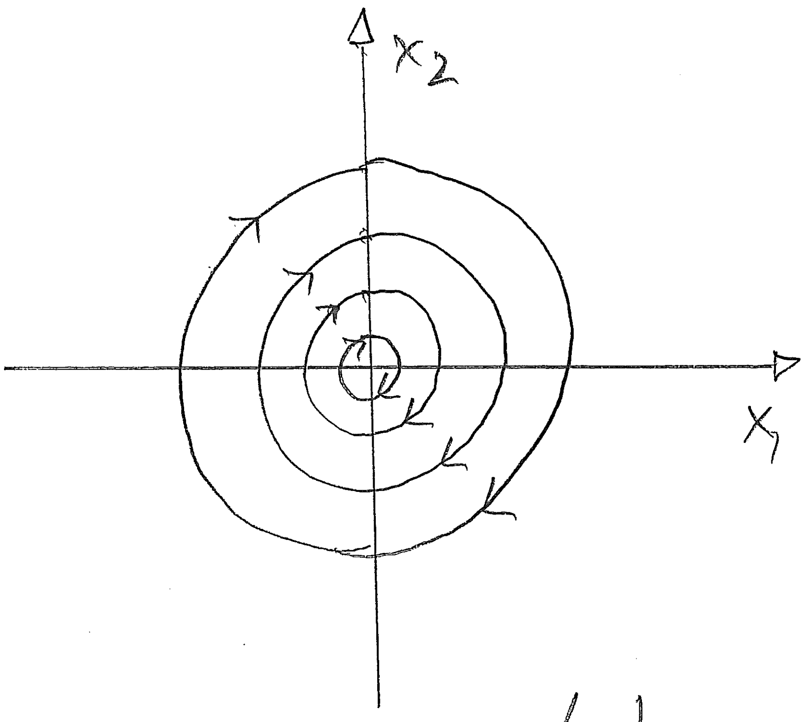
av

$$\bar{X} = C_1 \, \mathrm{Re}(\bar{x}^{(1)}) + C_2 \, \mathrm{Im}(\bar{x}^{(1)})$$

$$= C_1 \begin{pmatrix} 3\sin(3t) - \cos(3t) \\ 5\cos(3t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -3\cos(3t) - \sin(3t) \\ 5\sin(3t) \end{pmatrix},$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

b)



Lösningen är periodisk. Origo är ett centrum. (stabil men ej asymptotiskt stabil).