Övning 6 i differentialekvationer

Förra gången:

Kap 7: System av 1:a ordningens linjära DE:er

— * —

Idag:

Forts. kap 7: 7.8: Repeterade egenvärden

7.9: Icke-homogena system

Tal: 7.8.10*, 7.9.7*, 7.7.3^T, 8.3 (teoridelen)

— * —

Nästa gång: Kap 9: Icke-linjära system av DE:er

— * —

Repetition

Lösningar till

$$\bar{x}' = \bar{\bar{A}}\bar{x}$$

ansattes till $\bar{x} = \bar{k}e^{rt}$ vilket gav att r och $\bar{k}$ var egenvärden respektive egenvektorer till $\bar{\bar{A}}$.

7.8.10* a) Lös BV-problemet

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \bar{x} \qquad (1)$$

$$\bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Teckna trajektorior i fasplanet ($x_1 x_2$-planet) och grafen $x_1(t)$

Lösningsförslag a) Låt

$$\bar{\bar{A}} := \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till $\bar{\bar{A}}$:

$$\det(\bar{\bar{A}} - r\bar{\bar{I}}) = \begin{vmatrix} 3-r & 9 \\ -1 & -3-r \end{vmatrix} = -(3-r)(3+r) + 9$$

$$= r^2 - 9 + 9 = r^2 = 0 \Leftrightarrow r_{1,2} = 0$$

Egenvektorer

r=0:

$$(\bar{\bar{A}}-r\bar{\bar{I}})\bar{k}=\bar{0} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 9 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \xleftarrow{3\cdot r_2} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow k_1 = -3k_2$$

För $k_2=1$ fås egenvektorn $\bar{k}=\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \bar{x}^{(1)}=\bar{k}e^{rt}=\bar{k}=\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ löser (1)

Från teorin vet vi att det finns en fundamentalmängd till (1), d.v.s. två linjärt oberoende lösningar, men vi har bara hittat en, ty algebraiska multiplициteten för r=0 är två (r=0 dubbelrot) medan den geometriska multipliciteten är ett (en egenvektor).

Ny ansats:

$$\bar{x} = \bar{k}te^{rt} + \bar{l}e^{rt}$$

Sätt in i (1):

$$\bar{x}' = \bar{k}e^{rt} + r\bar{k}te^{rt} + r\bar{l}e^{rt} \overset{HL}{=}$$

$$= \bar{\bar{A}}\bar{k}te^{rt} + \bar{\bar{A}}\bar{l}e^{rt}$$

$$\Leftrightarrow (\bar{\bar{A}} - r\bar{\bar{I}})\bar{k}t\cancel{e^{rt}} + \left[(\bar{\bar{A}} - r\bar{\bar{I}})\bar{l} - \bar{k}\right]\cancel{e^{rt}} = 0 \quad \forall t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\bar{\bar{A}} - r\bar{\bar{I}})\bar{k} = \bar{0} & (2) \\ (\bar{\bar{A}} - r\bar{\bar{I}})\bar{l} = \bar{k} & (3) \end{cases}$$

Från tidigare har vi att $\bar{k} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ löser (2) med $r = 0$. Sätter vi in detta i (3) får vi

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 9 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ 3 \cdot r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$\Leftrightarrow$ $l_1 = -3l_2 - 1$. För $l_2 = -1$ fås $\bar{l} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

En andra lösning är således $(r=0)$

$$\bar{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$W[\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}] = \begin{vmatrix} -3 & -3t+2 \\ 1 & t-1 \end{vmatrix} =$$

$$= -3t+2+3t-3 = -1 \neq 0 \quad \forall t$$

$\Rightarrow$ $\bar{x}^{(1)}$ och $\bar{x}^{(2)}$ är linjärt oberoende och $\{\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}\}$ är därmed en fundamentalmängd till (1).

Den allmänna lösningen ges av

$$\bar{x} = c_1\bar{x}^{(1)} + c_2\bar{x}^{(2)} = c_1\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\left[\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$$

BV ger

$$\bar{x}(0) = \begin{pmatrix} -3c_1 + 2c_2 \\ c_1 - c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right), \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

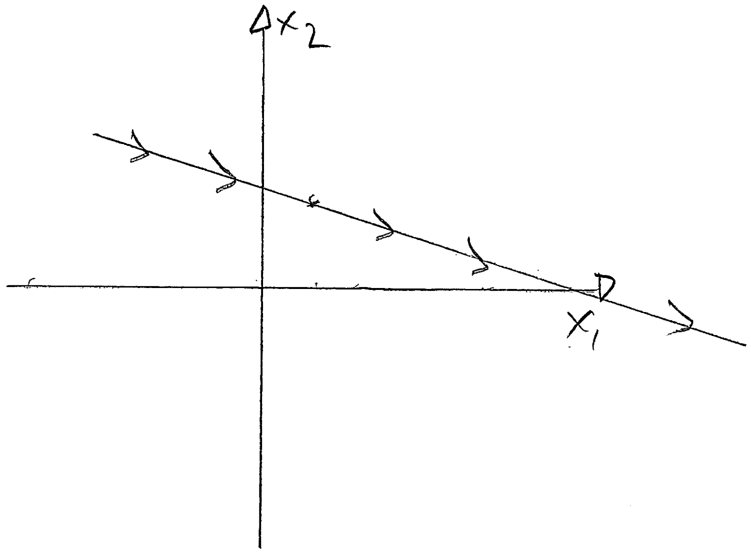
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

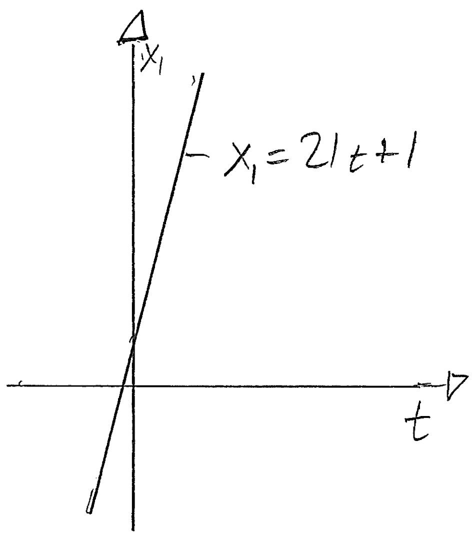
<u>Svar a)</u> $\bar{x}(t) \; -5\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} t - 7\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} t}}$$

——— * ———

b)





——— * ———

7.9.7* Hitta den allmänna lösningen till

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} \qquad (1)$$

Lösningsförslag Den allmänna lösningen till (1) kan skrivas som

$$\bar{x} = \bar{x}_p + \bar{x}_h$$

där $\bar{x}_h$ är den allmänna lösningen till den homogena ekvationen

$$\bar{x}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}_{=:\bar{\bar{A}}} \bar{x} \qquad (2)$$

och $\bar{x}_p$ är en partikulärlösning till (1).

1) $\bar{x}_h$ hittas som tidigare:

$$\det(\bar{\bar{A}} - \lambda \bar{\bar{I}}) = \begin{vmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{vmatrix} = (r-1)^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow r_1 = 3, \; r_2 = -1$$

Egenvektorer:

$r=3$: $\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow$ $k_2 = 2k_1$. För $k_1 = 1$ fås $\bar{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \bar{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}$

$r=-1$: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow$ $k_2 = -2k_1$, För $k_1 = 1$ fås $\bar{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \bar{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$

$$\Rightarrow \bar{x}_h = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

---

2) Låt $\bar{\bar{\Psi}} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ \bar{x}^{(1)} & \bar{x}^{(2)} \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}$

$\bar{\bar{\Psi}}$ är en fundamentalmatris till (2).

$\bar{x}_h$ kan skrivas som

$$\bar{x}_h(t) = \bar{\bar{\Psi}}(t)\,\bar{c}, \qquad \bar{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

så

$$\bar{x}_h' = \bar{\bar{\Psi}}'\bar{c} = \bar{\bar{A}}\bar{\bar{\Psi}}\bar{c}$$

Variation av parametrar

Ansätt $\bar{x}_p$ som

$$\bar{x}_p = \bar{\bar{\Psi}}(t)\bar{u}(t)$$

sätt in i (1), med $\bar{g}(t) := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$

$$\bar{x}_p'(t) = \bar{\bar{\Psi}}'(t)\bar{u}(t) + \bar{\bar{\Psi}}(t)\bar{u}'(t)$$

$$= \bar{\bar{A}}\bar{\bar{\Psi}}(t)\bar{u}(t) + \bar{\bar{\Psi}}(t)\bar{u}'(t) = HL$$

$$= \bar{\bar{A}}\bar{\bar{\Psi}}(t)\bar{u}(t) + \bar{g}(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{\bar{\Psi}}\bar{u}'(t) = \bar{g}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\bar{u}'(t) = \bar{\bar{\Psi}}^{-1}(t)\bar{g}(t)} \quad \text{(gäller generellt)}$$

Vi har

$$\bar{\bar{\Psi}}^{-1} = \frac{1}{-4e^{2t}} \begin{pmatrix} -2e^{-t} & e^{-t} \\ -2e^{3t} & e^{3t} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2e^{-3t} & e^{-3t} \\ 2e^{t} & -e^{t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{u}' = \bar{\bar{\Psi}}^{-1} \bar{g} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2e^{-3t} & e^{-3t} \\ 2e^{t} & -e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^{t} \\ e^{t} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3e^{-2t} \\ 5e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{u} = \frac{1}{4} \int \begin{pmatrix} 3e^{-2t} \\ 5e^{2t} \end{pmatrix} dt = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -3e^{-2t} \; (+d_1) \\ 5e^{2t} \; (+d_2) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{x}_p = \bar{\bar{\Psi}} \bar{u} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3e^{-2t} \\ 5e^{2t} \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2e^{t} \\ -16e^{t} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{e^{t}}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}$$

<u>Svar:</u> $\bar{x} = \bar{x}_h + \bar{x}_p = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + \frac{e^{t}}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

——— * ———

7.7.3[T] a) Hitta en fundamentalmatris

till

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \bar{x} \qquad (1)$$

b) Hitta fundamentalmatrisen $\bar{\bar{\Phi}}(t)$ som

löser

$$\bar{\bar{\Phi}}(0) = \bar{\bar{I}}$$

---

*

Lösningsförslag

$$\bar{A} := \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\bar{A} - \lambda \bar{\bar{I}}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \pm i$$

Egenvektorer:

$\lambda = i$:
$$\left(\begin{array}{cc|c} 2-i & -5 & 0 \\ 1 & -2-i & 0 \end{array}\right) \overset{\cdot 2+i}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -(2+i)\cdot 5 & 0 \\ 1 & -(2+i) & 0 \end{array}\right)_{5 \cdot r_2}$$

$\Leftrightarrow k_1 = (2+i)k_2$. För $k_2 = 1$ fås

$$\bar{k} = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x}(t) = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix} e^{it}$$

$$\begin{pmatrix}2+i\\1\end{pmatrix}e^{it}=\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)(\cos t+i\sin t)$$

Real- och imaginärdel utgör linjärt oberoende lösningar till (1),

$$Re(\bar{x})=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\cos t-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\sin t$$

$$Im(\bar{x})=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cos t+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\sin t$$

En fundamentalmatris ges av

Svar a) $$\bar{\Psi}(t)=\begin{pmatrix}2\cos t-\sin t & \cos t+2\sin t\\ \cos t & \sin t\end{pmatrix}$$

—— * ——

b) Vi vill hitta $\bar{x}^{(1)}$ och $\bar{x}^{(2)}$ så att

$$\bar{x}^{(1)}=c_1\left[\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\cos t-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\sin t\right]+c_2\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cos t+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\sin t\right]$$

$$\bar{x}^{(2)}=c_2 \text{ — '' — } + c_4 \text{ — '' — }$$

$$\bar{X}_1(0)=c_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow c_1=0,\ c_2=1$$

$$\bar{X}_2(0)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow c_3=1,\ c_4=-2$$

$$\Rightarrow \quad \bar{\bar{\Phi}} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ \bar{x}^{(1)} & \bar{x}^{(2)} \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t & -5\sin t \\ \sin t & \cos t - 2\sin t \end{pmatrix}$$

<u>Alternativt:</u> Vi har

$$\left(\bar{\bar{\Psi}}(t)\,\bar{c}\right)' = \bar{\bar{A}}\,\bar{\bar{\Psi}}(t)\,\bar{c}.$$

För $\bar{c} = \bar{\bar{\Psi}}^{-1}(0)\,\bar{d}$ fås

$$\left(\bar{\bar{\Psi}}(t)\,\bar{\bar{\Psi}}^{-1}(0)\,\bar{d}\right)' = \bar{\bar{A}}\,\bar{\bar{\Psi}}(t)\,\bar{\bar{\Psi}}^{-1}(0)\,\bar{d}$$

$$\Rightarrow \quad \left\{ \bar{\bar{\Phi}}(t) := \bar{\bar{\Psi}}(t)\,\bar{\bar{\Psi}}^{-1}(0) \right\}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\bar{\bar{\Phi}}\,\bar{d}\right)' = \bar{\bar{A}}\,\bar{\bar{\Phi}}\,\bar{d}$$

så kolonnerna i $\bar{\bar{\Phi}}$ löser (1) och

$$\bar{\bar{\Phi}}(0) = \bar{\bar{I}}$$

I vårt fall fås

$$\bar{\bar{\Psi}}(0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \bar{\bar{\Psi}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{\bar{\Phi}}(t) = \bar{\bar{\Psi}}(t)\bar{\bar{\Psi}}^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t & \cos t + 2\sin t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t & -5\sin t \\ \sin t & \cos t - 2\sin t \end{pmatrix}$$

---

*

Påstående 8.4 (teoridelen)

Det finns en unik lösning till BV-problemet

$$\bar{x}'(t) = \begin{pmatrix} \sin t^2 & t e^{t^2} \\ \frac{1}{1+t^2} & \cos t \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} t \\ t^2 e^t \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

definierad för alla t.

Lösningsförslag

Eftersom både koefficientmatrisen och ickehomogeniteten är kontinuerliga i hela $\mathbb{R}$, ger sats 7.1.2 att BV-problemet har en unik lösning definierad för alla t i $\mathbb{R}$.
