Övning 7 i differentialekvationer

Förra gången:

Kap 7: System av 1:a ordningens linjära DE:er

*

Idag: Kap 9: Icke-linjära DE:er
och stabilitet

Tal: 9.1.3b, 9.2.7, 9.2.17a, 9.3.14,
9.4.2*, 9.6.4.

*

Nästa gång: Repetition

*

Repetition

Linjära DE-system med konstanta koefficienter,

$$\bar{x}' = \bar{\bar{A}}\bar{x},$$

Ansätt $\bar{x} = \bar{k}e^{rt}$ Om $\bar{\bar{A}}$ har egenvärden med algebraisk multiplicitet ≥ 2 men geometrisk multiplicitet $<$ den algebraiska multipliciteten ansätter vi $\bar{x}$ som

$$\bar{x} = \bar{k} t e^{rt} + \bar{l} e^{rt},$$

vilket ger

$$\begin{cases} (\bar{\bar{A}} - r\bar{\bar{I}})\bar{k} = \bar{0} \\ (\bar{\bar{A}} - r\bar{\bar{I}})\bar{l} = \bar{k} \end{cases}$$

— * —

<u>Icke-homogena system</u>

$$\bar{x}' = \bar{\bar{P}}(t)\bar{x} + \bar{g}(t) \qquad (1)$$

Har vi en fundamentalmängd $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ till den homogena ekvationen

$$\bar{x}' = \bar{\bar{P}}(t)\bar{x}$$

ansätter vi lösningen till (1) som

$$\bar{x} = u_1(t)\bar{x}_1 + u_2(t)\bar{x}_2 = \bar{\bar{\Psi}}\bar{u}, \text{ där}$$

$$\bar{\bar{\Psi}}\left(\bar{x}_1 \; \bar{x}_2\right), \quad \bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Sätts detta in i (1) får vi

$$u_1'\bar{x}_1 + u_2'\bar{x}_2 = \bar{g} \Leftrightarrow \bar{\bar{\Psi}}\bar{u}' = \bar{g}$$

$$\Updownarrow$$

$$\bar{u}' = \bar{\bar{\Psi}}^{-1}\bar{g}.$$

— * —

9.1.3 b) Klassificera de kritiska punkterna till

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \bar{x} \qquad (1)$$

——— * ———

Lösningsförslag

Egenvärdena till

$$\bar{A} := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

ges av

$$\det(\bar{A} - \lambda \bar{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(2-\lambda)(2+\lambda) + 3 =$$

$$= \lambda^2 - 4 + 3 = \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$$

$\Rightarrow \det(\bar{A}) = 1 \cdot (-1) = -1$ så $(0,0)$ är enda kritiska punkten och är en instabil sadelpunkt enligt tabell 9.1.1.

——— * ———

<u>9.2.7</u> Hitta alla kritiska punkter

till

$$\begin{cases} x' = 2x - x^2 - y^2 \\ y' = 3y - 2y^2 - 3xy \end{cases}$$

——— * ———

<u>Lösningsförslag</u> $x' = 0 \Leftrightarrow$

$2x - x^2 - xy = 0 \Leftrightarrow x(2 - x - y) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ eller $x = 2 - y$

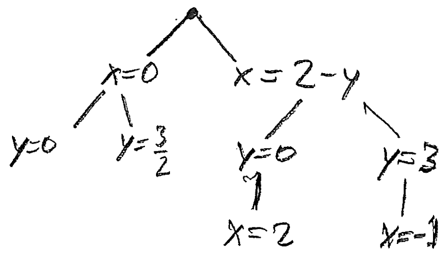
$x = 0 \Rightarrow \{y' = y(3 - 2y - \underbrace{3x}_{=0}) = 0\} \Rightarrow y = 0$ eller $y = \frac{3}{2}$

$x = 2 - y \Rightarrow \{y' = y(3 - 2y - 3(2 - y)) = y(y - 3) = 0\}$

$\Rightarrow y = 0$ eller $y = 3$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$x = 2 \qquad x = -1$



<u>Svar:</u> Kritiska punkter är $(0,0)$, $(0,\frac{3}{2})$, $(0,2)$ samt $(-1,3)$.

——— * ———

9.2.17 a) Hitta en ekvation på formen $H(x,y)=C$ uppfylld av trajektorierna till

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = 4x \end{cases}$$

Lösningsförslag

Fasplanmetoden:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4x}{y} \qquad (\Rightarrow y\,dy = 4x\,dx)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(y(x)^2\right) = \frac{d}{dx}\left(4x^2\right)$$

Svar: $H(x,y) = 4x^2 - y^2 = C$.

9.3.14 a) Hitta alla kritiska punkter till

$$\begin{cases} x' = 1 - xy \\ y' = x - y^3 \end{cases} \qquad (1)$$

b) Hitta motsvarande linjära system vid varje kritisk punkt.

c) Bestäm egenvärdena till varje linjärt system och klassificera, om möjligt, de kritiska punkterna.

Lösningsförslag

a) $\bar{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \bar{0} \Leftrightarrow \{(1)\} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - xy = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{y}, \ y \neq 0 \\ x - y^3 = 0 \Rightarrow x = y^3 \end{cases}$

$\frac{1}{y} = y^3 \Rightarrow y^4 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$y=1$, $x=1$; $y=-1$, $x=-1$

$\Rightarrow$ kritiska punkter är $(1,1)$ och $(-1,-1)$.

b) Jacobimatrisen till $F=1-xy$ och $G=x-y^3$ ges av

$$\bar{\bar{J}}(x,y):=\begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -y & -x \\ 1 & -3y^2 \end{pmatrix}$$

Det linjära systemet

$$(\bar{x}-\bar{x}_0)'=\bar{\bar{J}}(x_0,y_0)(\bar{x}-\bar{x}_0)$$

approximerar (1) nära den kritiska punkten $\bar{x}_0=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Om $\bar{u}=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}:=\bar{x}-\bar{x}_0$ fås

$$\bar{u}'=\bar{\bar{J}}(\bar{x}_0)\bar{u}$$

$$\bar{\bar{J}}(1,1)=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \bar{\bar{J}}(-1,-1)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Det linjära systemet

$$\bar{u}'=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\bar{u} \Leftrightarrow \begin{cases} u'=u-v \\ v'=u-3v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=-x-y+2 \\ y'=x-3y+2 \end{cases}$$

approximerar (1) kring $\bar{x}_0=(1,1)$

medan

$$\bar{u}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \bar{u} \Leftrightarrow \begin{cases} u' = u+v \\ v' = u-3v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x+y+2 \\ y' = x-3y-2 \end{cases}$$

approximerar (1) vid $\bar{x}_0 = (-1,-1)$.

---

c) Egenvärdena till $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ är

$r = -2$ (dubbelrot)

Egenvärdena till $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ är

$r_1 = -1+\sqrt{5} > 0$, $r_2 = -1-\sqrt{5} < 0$

Tabell 9.3.1 ger att $(1,1)$ är asymptotiskt stabil och beteendet är något av följande:

- Nod
- egentlig nod
- oegentlig nod
- spiralpunkt

men vi vet ej med denna analys

$(-1,-1)$ är en (instabil) sadelpunkt.

*

9.4.2* (konkurrerande arter)

a) Teckna ett riktningsfält till

$$\begin{cases} x' = x\left(\frac{3}{2} - x - \frac{y}{2}\right) \\ y' = y\left(2 - y - \frac{3x}{4}\right) \end{cases} \qquad (1)$$

b) Hitta alla kritiska punkter till (1).

c) Linjärisera kring varje kritisk punkt och klassificera, om möjligt, dessa

d) Teckna trajektorior kring varje kritisk punkt.

---

*

Lösningsförslag:

a) Se extern plot.

b) $$\bar{x}' := \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \bar{0} \iff \begin{cases} x\left(\frac{3}{2} - x - \frac{y}{2}\right) = 0 \\ y\left(2 - y - \frac{3x}{4}\right) = 0 \end{cases}$$

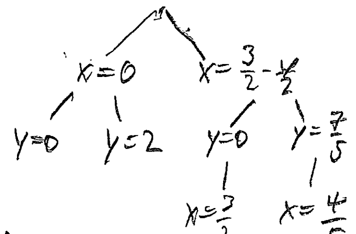
Om $x = 0 \Rightarrow y = 0$ eller $y = 2$

Om $x = \frac{3}{2} - \frac{y}{2} \Rightarrow y = 0$ eller

$$2 - y - \frac{3}{4}\left(\frac{3}{2} - \frac{y}{2}\right) = \frac{7}{8} - \frac{5}{8}y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{7}{5}$$

$y = 0$ ger $x = \frac{3}{2}$ $\quad y = \frac{7}{5}$ ger $x = \frac{4}{5}$.

Kritiska punkter är alltså



$(0,0)$, $(0,2)$, $(\frac{3}{2},0)$ och $(\frac{4}{5},\frac{7}{5})$.

---

c+d) Om $F(x,y) := x\left(\frac{3}{2} - x - \frac{y}{2}\right)$ och

$G(x,y) := y\left(2 - y - \frac{3x}{4}\right)$, betrakta Jacobimatrisen

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - 2x - \frac{y}{2} & -\frac{x}{2} \\ -\frac{3y}{4} & 2 - 2y - \frac{3x}{4} \end{pmatrix}$$

$\underline{(0,0):}$

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena är $r_1 = \frac{3}{2}$, $r_2 = 2$

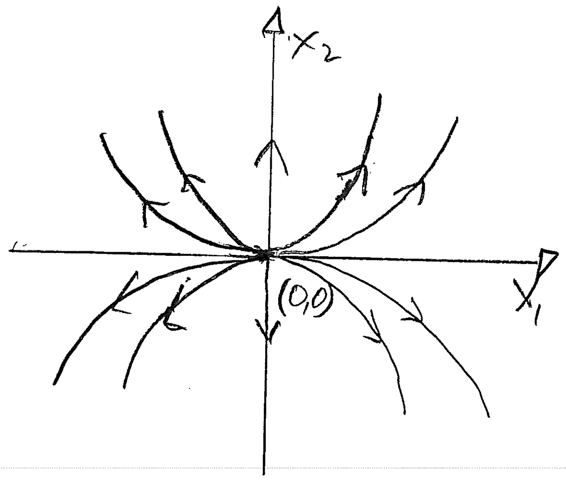
$\Rightarrow$ {tabell 9.3.1} $\Rightarrow$ $\underline{(0,0) \text{ instabil nod}}$

Egenvektorer är $(1,0)$ (till r_1) och $(0,1)$ (till r_2)

$$\Rightarrow \quad \bar{x} \approx c_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{\frac{3}{2}t} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{2t}$$

$$= e^{\frac{3}{2}t}\left[c_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{\frac{t}{2}}\right] \text{ nära } (0,0)$$

Några trajektorier:



$\underline{(0,2):}$

$$\bar{\bar{J}}(0,2) = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{3}{2} & -2\end{pmatrix}$$

Egenvärdena är $r_1 = \frac{1}{2}$ och $r_2 = -2$

$\Rightarrow$ {tabell 9.3.1} $\Rightarrow$ $(0,2)$ är en <u>(instabil) sadelpunkt</u>

Egenvektorer

$r_1 = \frac{1}{2}: \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow 3k_1 = -5k_2$

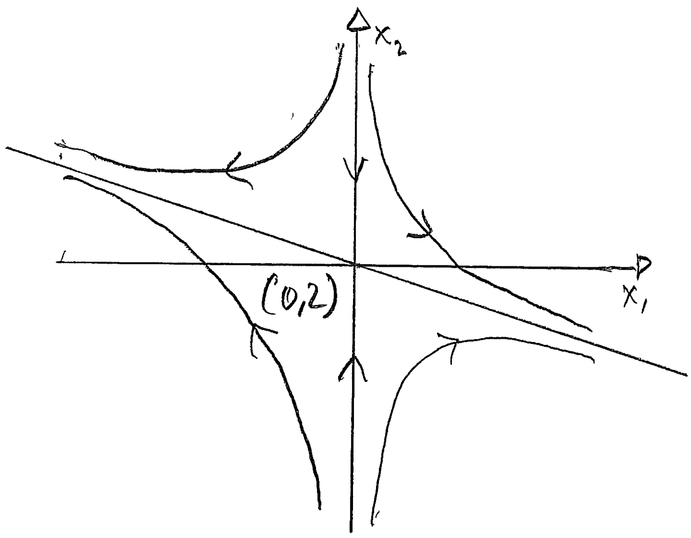
$k_2 = 3 \Rightarrow k_1 = -5 \Rightarrow \bar{k}_{r_1} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$r_2 = -2: \left(\begin{array}{cc|c} \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow k_1 = 0, \ k_2$ fri

$k_2 = 1 \Rightarrow \bar{k}_{r_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \bar{x} \approx c_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} e^{\frac{t}{2}} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

nära $(0,2)$



$\underline{\left(\frac{3}{2}, 0\right):}$

$$\bar{J}\left(\tfrac{3}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & \frac{7}{8} \end{pmatrix}$$

Egenvärdena är $r_1 = -\frac{3}{2}$ och $r_2 = \frac{7}{8}$

$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}, 0\right)$ <u>(instabil) sadelpunkt.</u>

<u>Egenvektorer:</u>

$r_1 = -\frac{3}{2}$: $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{19}{8} & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow k_2 = 0,\ k_1$ fri

$k_1 = 1$ ger $\bar{k}_{r_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

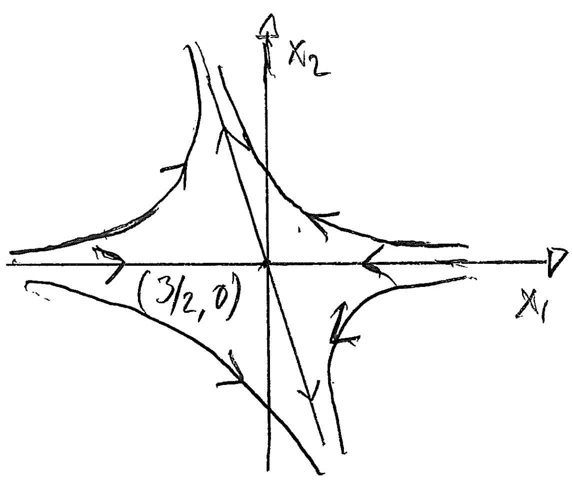
$r_2 = \frac{7}{8}$: $\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{19}{8} & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \frac{3}{4}k_2 = -\frac{19}{8}k_1$

$\Leftrightarrow k_2 = -\frac{19}{6}k_1$

$k_1 = 6 \Rightarrow k_2 = -19 \Rightarrow \bar{k}_{r_2} = \begin{pmatrix} 6 \\ -19 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \bar{x} \approx c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{3}{2}t} + c_2 \begin{pmatrix} 6 \\ -19 \end{pmatrix} e^{\frac{7}{8}t} + \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nära $\begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$



$\underline{\left(\frac{4}{5},\frac{7}{5}\right)}$:

$$\bar{J}\left(\frac{4}{5},\frac{7}{5}\right)=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}-\frac{8}{5}-\frac{7}{10} & -\frac{4}{10}\\ -\frac{21}{20} & 2-\frac{14}{5}-\frac{12}{20}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{5} & -\frac{2}{5}\\ -\frac{21}{20} & -\frac{7}{5}\end{pmatrix}$$

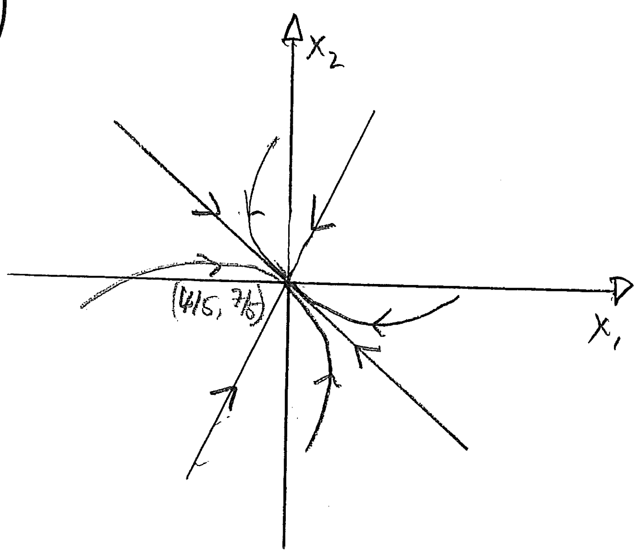
Egenvärdena: $\left(-\frac{4}{5}-r_1\right)\left(-\frac{7}{5}-r_2\right)-\frac{21}{50}=0 \Leftrightarrow r_{1,2}=\frac{1}{10}\left(-11\pm\sqrt{51}\right)$

$r_{1,2}<0 \Rightarrow \{\text{tabell } 9.3.1\} \Rightarrow \left(\frac{4}{5},\frac{7}{5}\right)$ är en <u>stabil nod</u>.

Egenvektorer kan räknas fram och ger

$$\bar{k}_{r_1}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{21}\left(3+\sqrt{51}\right)\\ 1\end{pmatrix},\quad \bar{k}_{r_2}=\begin{pmatrix}\frac{2}{21}\left(-3+\sqrt{51}\right)\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{x}=c_1\begin{pmatrix}-\frac{2}{21}\left(3+\sqrt{51}\right)\\ 1\end{pmatrix}e^{\frac{1}{10}\left(-11+\sqrt{51}\right)t}+c_2\begin{pmatrix}\frac{2}{21}\left(-3+\sqrt{51}\right)\\ 1\end{pmatrix}e^{\frac{1}{10}\left(-11-\sqrt{51}\right)t}+\begin{pmatrix}4/5\\ 7/5\end{pmatrix}$$



9.6.4 Visa att origo är en instabil kritisk punkt till

$$\begin{cases} x' = 2x^3 - y^3 \\ y' = 2xy^2 + 4x^2y + 2y^3 \end{cases} \qquad (1)$$

m.h.a. en Liapunovfunktion på formen

$$ax^2 + cy^2$$

Lösningsförslag Om $V(x,y) := ax^2 + cy^2$ fås

$$\dot{V}(x,y) := \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}x' + \frac{\partial V}{\partial y}y' = \{(1)\}$$

$$= 2ax(2x^3 - y^3) + 2cy(2xy^2 + 4x^2y + 2y^3)$$

$$= 2a(2x^4 - xy^3) + 2c(2xy^3 + 4x^2y^2 + 2y^4)$$

$$= 2a(2x^4 - xy^3) + 2cy^2(2xy + 4x^2 + 2y^2)$$

$$= 2a(2x^4 - xy^3) + 2cy^2\underbrace{\left((x+y)^2 + 3x^2 + y^2\right)}_{\geq 0}$$

Om $a=0$ och $c>0$ (t.ex. $\frac{1}{2}$) ser vi att $\dot{V}$ är positivt definit på $\mathbb{R}^2$, d.v.s. $\dot{V}(0,0)=0$ och $\dot{V}(x,y)>0$ för alla $(x,y)\neq(0,0)$. Dessutom är

$$V(x,y) = \{c=\tfrac{1}{2}\} = \frac{y^2}{2}$$

vilket betyder att att vi kan hitta en punkt i varje omgivning kring origo sådan att $V(x,y)>0$. Sats 9.6.2 ger därmed att origo är en instabil kritisk punkt.

—— * ——