Övning 1 i SF1629 transformer för CTFYS2 och CMEDT3

IDAG: Kap 2.3: Cesàrosummation

2.4: Positiva summationskärnor

Kap 4: Fourierserier

Nästa gång: Fortsättning kap 4: Fourierserier

2.12 Visa att om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ har ett ändligt $(C,1)$-värde, då gäller det att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = 0$$

Vad kan sägas om $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{k}$?

——— * ———

L:

$$\sigma_n \longrightarrow s, \quad n \longrightarrow \infty$$

$$\sigma_n = \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1} + s_n}{n}$$

$$= \frac{s_n}{n} + \underbrace{\frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1}}{n}}_{= \sigma_{n-1} \cdot \frac{(n-1)}{n}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{s_n}{n} = \sigma_n - \frac{n-1}{n} \cdot \sigma_{n-1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{s_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \left[\sigma_n - \left(\frac{n-1}{n}\right)\sigma_{n-1}\right] =$$

$$= \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \sigma_n}_{=s} - \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \sigma_{n-1}}_{=s} = s - s = 0 \quad \text{V.S.V.}$$

V.g.v.

$$\frac{a_k}{k} = \frac{s_k - s_{k-1}}{k} = \frac{s_k}{k} - \frac{s_{k-1}}{k}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{k} = \lim_{k\to+\infty}\left(\frac{s_k}{k} - \frac{s_{k-1}}{k}\right) =$$

$$= \underbrace{\lim_{k\to+\infty} \frac{s_k}{k}}_{=0} - \underbrace{\lim_{k\to+\infty} \frac{s_{k-1}}{k}}_{=0} = 0$$

<u>Svar</u>: $\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{k} = 0$

2.13 Bevisa att om $a_k \geq 0$ och $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är $(C,1)$-summerbar, då är serien konvergent i vanlig mening

——— $\ast$ ———

L: Antag motsatsen. Då divergerar $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ växer mot $+\infty$, d.v.s. $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ eftersom $a_k \geq 0$ $\forall k$.

I synnerhet betyder detta att

$s_n > s$ $(\ast)$ för $n \geq N$. Vi har även att $s_n \geq s_m$ om $n \geq m$ då

$$s_n - s_m = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=m+1}^{n} \underbrace{a_k}_{\geq 0} \geq 0$$

Med detta får vi

$$\sigma_n = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_N + \dots + s_n}{n} \geq \frac{s_N + \dots + s_n}{n}$$

$$\geq \frac{\overbrace{s_N + s_N + \dots + s_N}^{n-N+1 \text{ st}}}{n} = \frac{(n-N+1)\, s_N}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \sigma_n \geq \lim_{n \to +\infty} \frac{(n-N+1)}{n} s_N = s_N.$$

Dock är $\lim_{n \to +\infty} \sigma_n = s$

$\Rightarrow$ $s \geq s_N$, men $s_N > s$ från $(*)$

vilket ger en motsägelse.

Därför konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (och är

lika med s enligt Lemma 2.1)

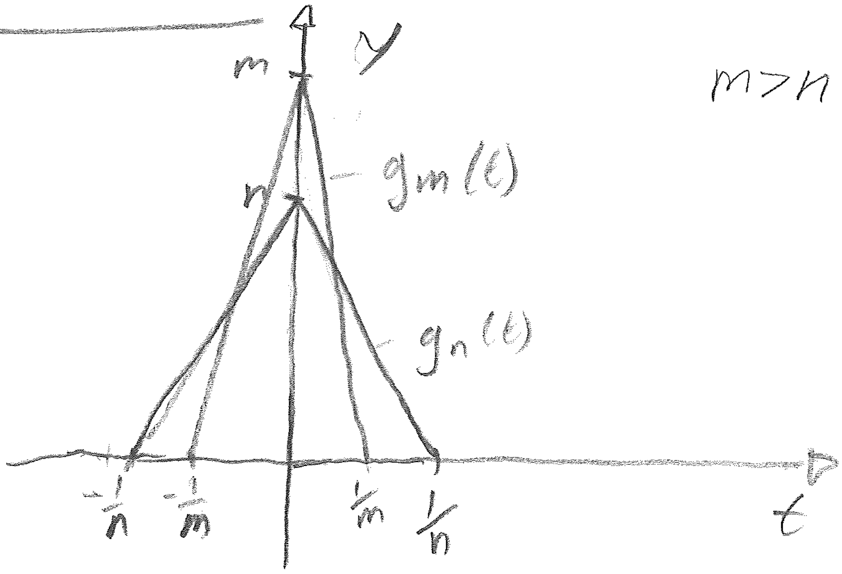
$\#$

2.18 Bevisa att

$$g_n(t)=\begin{cases} n-n^2t, & 0\le t\le \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n}<t \\ g_n(-t), & t<0 \end{cases}$$

utgör en positiv summationskärna

L:



En positiv summationskärna $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ uppfyller

i) $K_n(t)\ge 0$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} K_n(t)\,dt=1$ (se s. 22 i Vrerblad)

iii) Om $\delta>0$, då gäller det att

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\delta<|t|} K_n(t)\,dt=0$$

V.g.v.

För $\{g_n\}$ ser vi att i) uppenbarligen är uppfyllt.

ii)

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_n(t)\,dt = \text{Arean mellan } g_n \text{ och } x\text{-axeln} =$$

$$= \underbrace{2 \cdot \frac{1}{n}}_{\text{basen}} \cdot \underbrace{n}_{\text{höjden}} / 2 = 1 \quad \text{ok!}$$

iii) Låt $\delta > 0$ vara givet.

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\delta < |t|} g_n(t)\,dt = \{g_n \text{ jämn}\} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} 2 \int_{\delta < t} g_n(t)\,dt = \left\{ \begin{array}{c} \text{anta utan} \\ \text{inskränkning att} \\ n \geq \frac{1}{\delta} \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ g_n(t) = 0 \text{ om } t > \delta \geq \frac{1}{n} \right\} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} 2 \int_{\delta < t} 0\,dt = 0$$

V.S.V

2.19. a) Visa att $K_n(t) = \frac{n}{2} e^{-n|t|}$

beskriver en positiv summationskärna

b) Anta att f är en begränsad och styckvis kontinuerlig funktion på $\mathbb{R}$, och att

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = 3, \quad \lim_{t \to 0^-} f(t) = 1.$$

Visa att

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-n|t|} f(t)\,dt = 2$$

L: Se s. 22-23 i Vretblad och förra uppgiften.

$K_n(t) = \frac{n}{2} e^{-n|t|} \geq 0$ så i) är uppfyllt

ii) $\int_{\mathbb{R}} K_n(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{n}{2} e^{-n|t|}\,dt = \{K_n\text{ jämn}\} =$ v.g.v.

$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{n}{2} e^{-nt}\, dt = n \cdot \left[\frac{e^{-nt}}{-n}\right]_{t=0}^{+\infty} = 1 \quad \text{ok!}$$

iii) Låt $\delta > 0$ vara givet.

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\delta<|t|} K_n(t)\, dt = \{K_n \text{ jämn}\} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 2\int_{\delta<t} \frac{n}{2} e^{-nt}\, dt = \lim_{n\to+\infty} n \cdot \left[\frac{e^{-nt}}{-n}\right]_{\delta}^{+\infty} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{-n\delta} = \{\delta > 0\} = 0, \quad \text{d.v.s.}$$

~~krav~~ iii) är uppfyllt

---

b) Låt intervallet $I = (-r, r)$, $r > 0$ vara sådant att f är kontinuerlig i I förutom i $t = 0$. Ett sådant r existerar eftersom f är styckvis kontinuerlig.

v.g.v

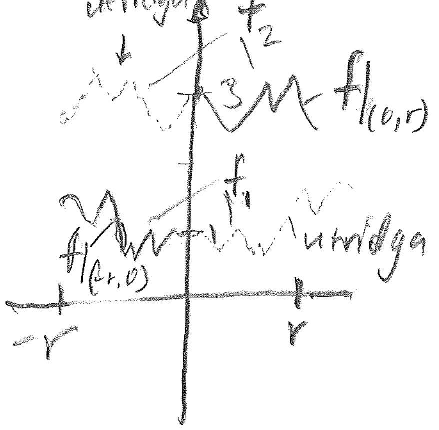
Vi får

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-n|t|} f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_{r<|t|} -''- + \int_{-r}^{r} -''-$$

$$0 \leq \left|\int_{r<|t|} K_n(t) f(t)\,dt\right| \leq \int_{r<|t|} K_n(t) \underbrace{|f(t)|}_{\leq A \text{ ty } f \text{ begränsad}}\,dt \leq$$

$$\leq A \int_{r<|t|} K_n(t)\,dt \longrightarrow 0, \quad n \to \infty$$

$$\int_{-r}^{r} K_n(t) f(t) = \int_{-r}^{0} K_n(t) f(t)\,dt + \int_{0}^{r} K_n(t) f(t)\,dt$$



$$= \frac{1}{2}\int_{-r}^{r} K_n(t) f_1(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{-r}^{r} K_n(t) f_2(t)\,dt$$

$$= \{\text{Sats } 2.1 \text{ i Vre s. } 22\} =$$

v.g.v.

$$= \frac{1}{2} f_1(0) + \frac{1}{2} f_2(0) = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 3 = 2$$

$$\therefore \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-n|t|}\, dt = \lim_{n\to+\infty} \int_{r<|t|} -\shortparallel-\, dt + \lim_{n\to+\infty} \int_{-r}^{r} -\shortparallel-\, dt =$$

$$= 0 + 2 = 2 \qquad \text{V.S.V.}$$

---- * ----

4.6 Hitta Fourierserien till

a) $\cos(2t)$, b) $\cos^2(t)$, c) $\sin^3(t)$

L:

a) $\cos(2t)$ jämn $\Rightarrow b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2t)\sin(nt)\,dt = 0$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2t)\cos(nt)\,dt = \{\text{BETA s. 127 4}\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\Big(\cos((2-n)t)+\cos((2+n)t)\Big)\,dt =: I$$

$$I = \{n\neq 2\} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin((2-n)t)}{2-n}+\frac{\sin((2+n)t)}{2+n}\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$= 0$ (OBS: gäller även för $n=0$)

$$I = \{n=2\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\big(1+\cos(2t)\big)\,dt =$$

$$1 + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(2t)}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 1$$

$$\therefore \cos(2t) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nt) = \cos(2t)$$

V.S.V.

b) $\cos^2(t)$ jämn $\Rightarrow$ $b_n = 0 \quad \forall n$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(t)\cos(nt)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2}\cdot\cos(nt)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\,dt}_{\substack{=0 \text{ om } n>0 \\ =1 \text{ om } n=0}} + \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2t)\cos(nt)\,dt}_{\substack{=0 \text{ om } n\neq 2 \\ =\frac{1}{2} \text{ om } n=2}} =$$

$\therefore\ a_0 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_n = 0, \quad n \neq 0, 2$

$$\Rightarrow \cos^2(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nt) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2t)}{2}$$

c) $\sin^3(t)$ udda $\Rightarrow$ $a_n = 0 \quad \forall n$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3(t)\sin(nt)\,dt = \quad \text{v.g.v.}$$

$$= \left\{ \text{BETA s. } 128,\ \binom{3}{1} = 3,\ \binom{3}{0} = 1 \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4} \cdot \left(3\sin(t) - \sin(3t)\right) \sin(nt)\, dt$$

$$= \frac{3}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)\sin(nt)\, dt - \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(3t)\sin(nt)\, dt$$

$$= \frac{3}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((1-n)t)\, dt - \underbrace{\frac{3}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((1+n)t)\, dt}_{=0}$$

$$- \frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((3-n)t)\, dt + \underbrace{\frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((3+n)t)\, dt}_{=0}$$

$$\frac{3}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((1-n)t)\, dt = \begin{cases} \frac{3}{4}, & n=1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((3-n)t)\, dt = \begin{cases} \frac{1}{4}, & n=3 \\ 0, & n \neq 3 \end{cases}$$

v.g.v.

$\therefore \quad b_1 = \frac{3}{4}, \quad b_3 = -\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \quad \sin^3(t) \sim \frac{3\sin(t) - \sin(3t)}{4}$$

Kontrollfrågor

1) Vad betyder det att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ har ett ändligt (C,1)-värde?

2) Vilka egenskaper har en positiv summationskärna?

Slut övning 1.