Övning 2 i Transformer för CTFYS2 och CMEDT3

Förra gången: Kap 2: Cesàrosummation

Idag: Kap 4: Fourierserier

Nästa gång: Kap 5: L^2 teori

Kontrollfrågor

- Vad säger Sats 4.5 i Vretblad?
  (tips: rita)

- Vad är uttrycken för Fourierkoefficienterna
  - a_n ?
  - b_n ?
  - c_n ?

4.15 Visa att om $f \in C^k(\mathbb{T})$ då har vi följande,

$$\lim_{n \to \pm\infty} n^k c_n = 0$$

Lö f har Fourierserien

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-inx} dx$$

För f' får vi

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} dx = \{\text{Partiell integration}\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[f(x) e^{-inx} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (-in) f(x) e^{-inx} dx =$$

$$= \frac{(-1)^n}{2\pi} \underbrace{\left(f(\pi) - f(-\pi) \right)}_{=0 \text{ ty } f \text{ periodisk}} + in \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx}_{= c_n(f)} = in\, c_n(f)$$

V.g.v.

På liknande sätt får vi

$$c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$$

Dessutom är $f^{(k)}$ absolutintegrerbar, så Riemann-Lebesgues lemma ger

$$\lim_{n \to \pm\infty} |c_n(f^{(k)})| = \lim_{n \to \pm\infty} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x) e^{-inx} \, dx \right| = 0$$

$$\therefore \lim_{n \to \pm\infty} |c_n(f^{(k)})| = \lim_{n \to \pm\infty} |n|^k |c_n(f)| = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \to \pm\infty} n^k c_n(f) = 0 \qquad \text{v.s.v.}$$

4.16

Vilka värdena på konstanten a så att

$$y''(t) + a y(t) = y(t+\pi) \qquad (1)$$

har en 2π-periodisk lösning som inte är identiskt lika med noll. Finn även alla sådana lösningar.

L: Ansätt lösningen som

$$y = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$$

Vi kan derivera termvis om vi antar att $y \in C^2(\mathbb{T})$ och får då

$$y'' = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -n^2 c_n e^{int}$$

medan

$$y(t+\pi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in(t+\pi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n c_n e^{int}$$

V.g.v.

Sätter vi in detta i (1) fås

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(-n^2 c_n e^{int} + a c_n e^{int}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n c_n e^{int}$$

$$\iff \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(a - n^2 - (-1)^n\right) c_n e^{int} = 0$$

$$\Rightarrow a = n^2 + (-1)^n \text{ el. } c_n = 0 \quad \forall n$$

Om $a = n^2 + (-1)^n$ kan c_{-n} och c_n väljas fritt och vi får lösningarna

$$y = Ae^{int} + Be^{-int}$$

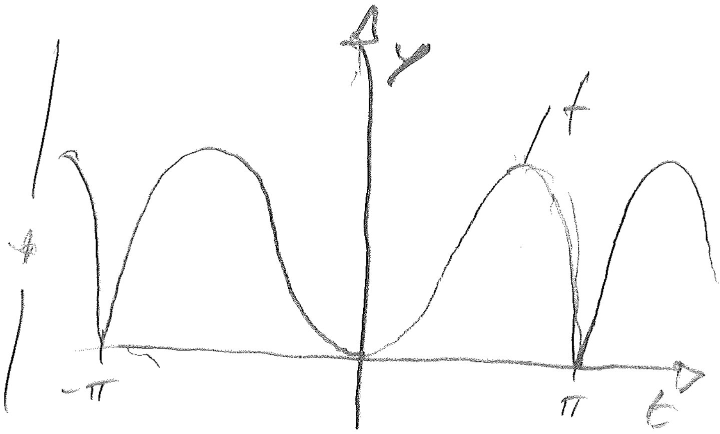
\#

4.18 $f(t) := t\sin(t), \quad |t| < \pi$

och $f(t+2\pi) = f(t)$.

Bestäm f:s Fourierserie och undersök för vilka värden som serien konvergerar mot $f(t)$.

L: f är en jämn funktion $\Rightarrow b_n = 0 \ \forall n$



$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(t) = \{ f \text{ jämn} \} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(t)\cos(nt)\,dt = \{ \text{BETA s. 127} \} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\cdot\left(\sin((1+n)t) + \sin((1-n)t)\right)dt \quad \text{v.g.v.}$$

$\underline{n=1}$:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(2t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[-t\frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\cos(2t)\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{2}$$

$\underline{n\neq 1}$:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[-t\cdot\left(\frac{\cos((1+n)t)}{1+n} + \frac{\cos((1-n)t)}{1-n}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos((1+n)t)}{1+n} + \frac{\cos((1-n)t)}{1-n}\,dt$$

$$= -\frac{(-1)^{1+n}}{1+n} - \frac{(-1)^{1-n}}{1-n} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((1+n)t)}{(1+n)^2} + \frac{\sin((1-n)t)}{(1-n)^2}\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{(-1)^{1+n}}{1+n} - \frac{(-1)^{1-n}}{1-n} + 0 = \frac{-(-1)^{1+n}\cdot(1-n) - (-1)^{1-n}\cdot(1+n)}{1-n^2} =$$

$$= \left\{ (-1)^{1+n} = (-1)^{1-n} \ \text{tγ} \ (-1)^{1-n} = (-1)^{1-n}\cdot\underbrace{(-1)^{2n}}_{=1} = (-1)^{1+n} \right\} =$$

άρτιο

$$\frac{(-1)^{1+n}(1-n+1+n)}{n^2-1} = \frac{2\cdot(-1)^{1+n}}{n^2-1}.$$

För $n=0$ gäller resultatet ovan och $a_0 = \frac{2\cdot(-1)}{0-1} = 2$.

Vi får

$$f \sim \frac{a_0}{2} + a_1\cos(t) + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n\cos(nt) =$$

$$= 1 - \frac{\cos(t)}{2} + 2\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{1+n}}{n^2-1}\cos(nt)$$

Då f är deriverbar i intervallet $(-\pi, \pi)$ konvergerar f:s Fourierserie mot f i $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

V.g.v.

Låter vi $f(\pi) := 0$ fås $f(-\pi) = 0$

och eftersom f har generaliserade

höger- och vänsterderivator i dessa

punkter, konvergerar Fourierserien mot

$\frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = 0 = f(\pi)$ i punkten $t = \pi$.

Med andra ord konvergerar

fås Fourierserie mot f i alla

punkter i $\mathbb{R}$.

— * —

4.20 f är 2π-periodisk och

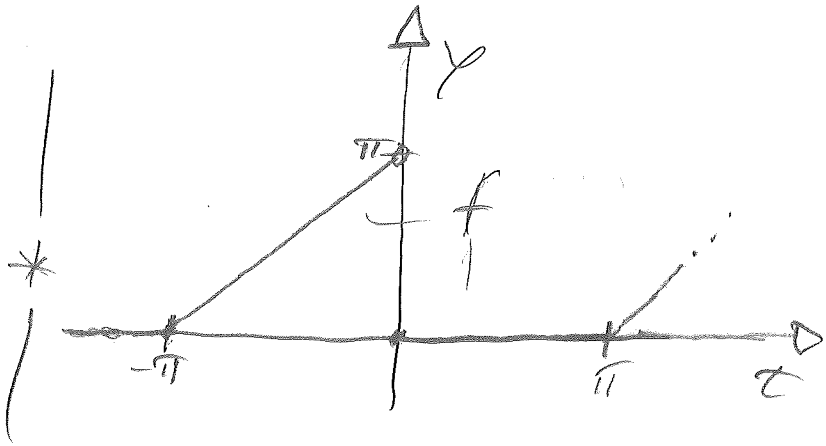
$$f(t) := \begin{cases} t+\pi, & -\pi < t < 0 \\ 0, & 0 \le t \le \pi \end{cases}$$

a) Hitta f:s Fourierserie och tecknа seriens summa på $[-3\pi, 3\pi]$

b) Beräkna $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$

Lö:

a)



$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(t+\pi)\cos(nt)\,dt = \{n \neq 0\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[(t+\pi)\cdot\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin(nt)}{n}\,dt = \text{v.g.v.}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(nt)}{n^2}\right]_{-\pi}^{0} = \frac{1-(-1)^n}{\pi n^2} = \begin{cases} 0, & n \text{ jämn} \\ \frac{2}{\pi n^2}, & n \text{ udda} \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} t+\pi \, dt = \frac{\text{Arean}}{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (t+\pi)\sin(nt)\,dt =$$

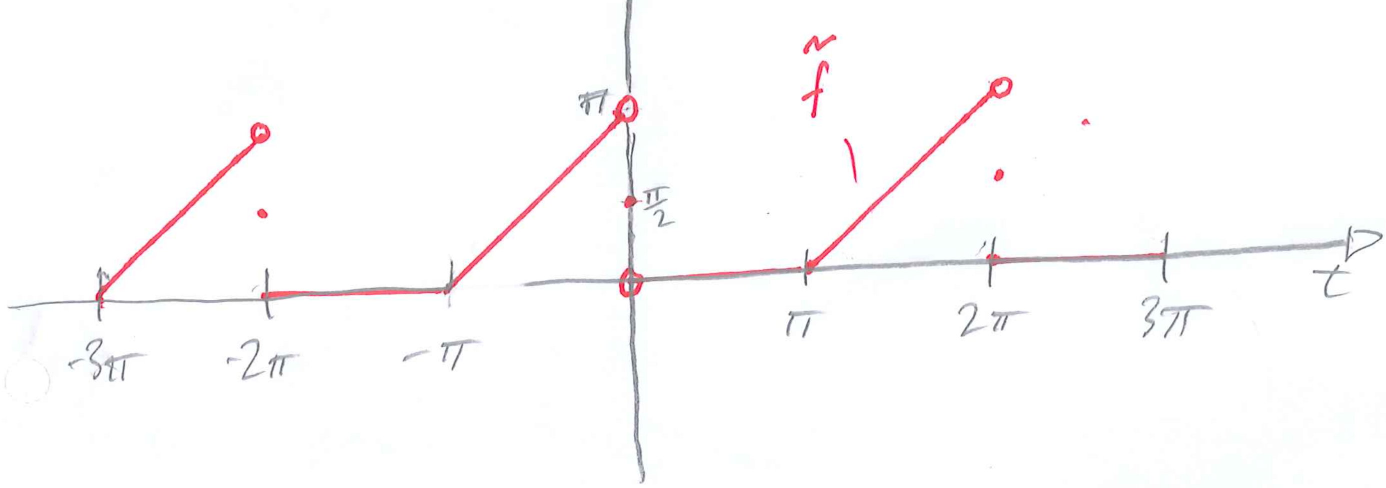
$$= \frac{1}{\pi}\left[(t+\pi)\frac{(-\cos(nt))}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos(nt)\,dt}_{=0}$$

$$= -\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \quad f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1}\cos((2n-1)t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nt)$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos((2n-1)t)}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nt)}{n} =: \tilde{f}$$

$\tilde{f}$ konvergerar mot medelvärdet av sidogränsvärdena.



---

b) Vi ser att $\tilde{f}$ konvergerar mot $\frac{\pi}{2}$ för $t=0$ vilket ger

$$\tilde{f}(0) = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} + 0$$

$$\iff \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} = \text{Svar b)}$$

4.32 Bestäm Fourierserierna till

a) $f(t) = 2 + 7\cos(3t) - 4\sin(2t)$, $-\pi < t < \pi$

b) $f(t) = |\sin(t)|$, $-\pi < t < \pi$

c) $f(t) = (\pi - t)(\pi + t)$, $-\pi < t < \pi$

d) $f(t) = e^{|t|}$, $-\pi < t < \pi$

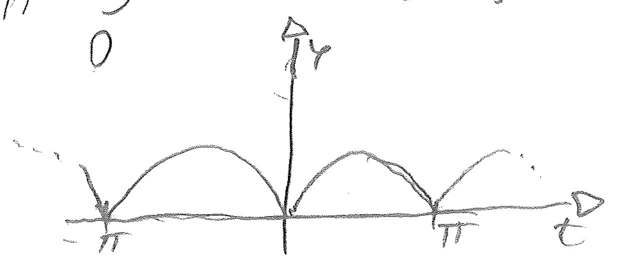
och bestäm summan av dessa serier för alla t.

Lö

a) f är sin egen Fourierserie och serien $\tilde{f}(t)$ konvergerar mot $f(t)$ för alla t.

b) $|\sin(t)|$ är jämn $\Rightarrow$ $b_n = 0$ $\forall n$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)\cos(nt)\,dt = \{\text{BETA s. } 127\} =$$



v.g.v.

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin((1+n)t) + \sin((1-n)t)\, dt = \{ n \neq 1 \} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos((1+n)t)}{(1+n)} - \frac{\cos((1-n)t)}{1-n} \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{(-1)^{1+n}}{1+n} - \frac{(-1)^{1-n}}{1-n} + \frac{1}{1+n} + \frac{1}{1-n} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \begin{cases} 0, & n \text{ udda} \\ \frac{2}{1+n} + \frac{2}{1-n} = \frac{2(1-n) + 2(1+n)}{1-n^2} = \frac{4}{1-n^2}, & n \text{ jämna} \end{cases}$$

$\underline{n=1:}$ $$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(2t)\, dt = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos(2t)}{2} \right]_0^{\pi} = 0$$

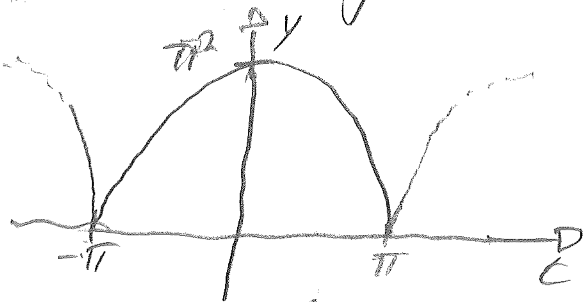
$$\therefore \quad |\sin(t)| \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n} \cos(2nt) =$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nt)}{1-4n^2}$$

Serien konvergerar mot $f(t)$ för alla t enligt Sats 4.5 i Vretblad v.s.v.

c) $(\pi-t)(\pi+t)=\pi^2-t^2$ är jämn

$\Rightarrow \quad b_n=0$



$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-t^2)\cos(nt)\,dt=\{n\neq 0\}$$

$$=\frac{2}{\pi}\underbrace{\left[(\pi^2-t^2)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi}}_{=0}-\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}-2t\sin(nt)\,dt$$

$$\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi}t\sin(nt)\,dt=\{\text{BETA s. 168 formel 216}\}=$$

$$\frac{4}{\pi n^3}\left[\sin(nt)-nt\cos(nt)\right]_0^{\pi}=-\frac{4\cdot(-1)^n}{n^2}$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\pi^2-t^2\,dt=\frac{2}{\pi}\left[\pi^2t-\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\pi^3-\frac{\pi^3}{3}\right)=\frac{4\pi^2}{3}$$

V.g.v

$$\therefore \quad \pi^2 - t^2 \sim \frac{4\pi^2}{6} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)$$

Serien konvergerar mot $f(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ (se figur)

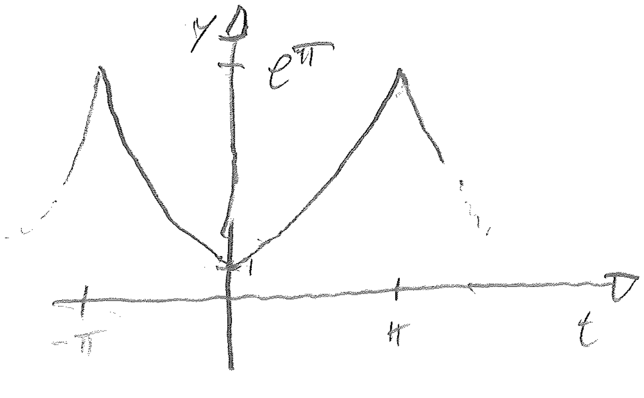
d) $e^{|t|}$ jämn $\Rightarrow$ $b_n = 0$ $\forall n$ enligt Sats 4.5 i Vrettblad

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^t \cos(nt)\,dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{BETA s. 175} \\ \text{formel 332} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+n^2}\left[e^t \cdot (\cos(nt) + n\sin(nt))\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi(1+n^2)}\left(e^{\pi}(-1)^n - 1\right).$$

$$\therefore \quad e^{|t|} \sim \frac{e^{\pi} - 1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\pi}(-1)^n - 1}{(1+n^2)}\cos(nt)$$



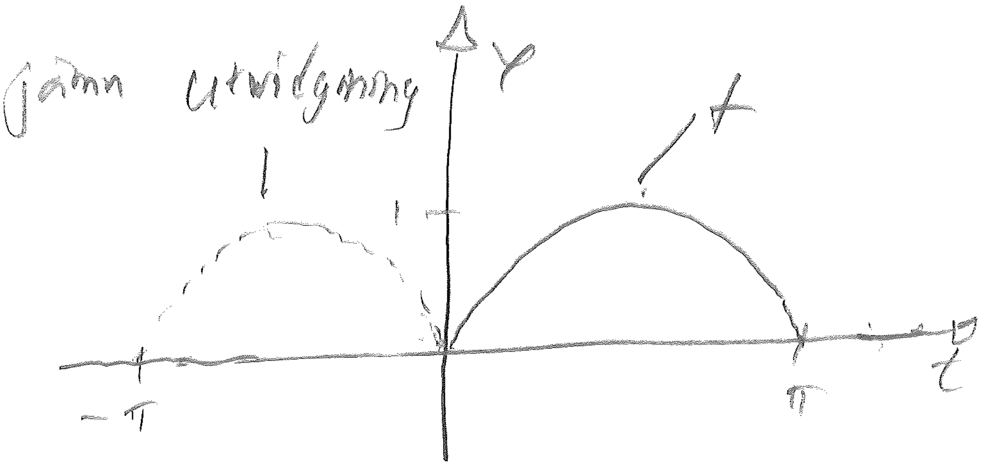
Summan konvergerar mot $e^{|t|}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ enligt Sats 4.5 i Vrettblad (se figur)

4.33. Hitta cosinusserien till

$$f(t) = \sin(t), \quad 0 < t < \pi$$

— ⊗ —

L:



Vi låter $f(-t) := f(t)$, $0 < t < \pi$,

Denna funktion kan uppenbarligen skrivas som $|\sin(t)|$ då

$|\sin(t)| = \sin(t) = f(t)$ $\quad 0 < t < \pi$ och

$|\sin(-t)| = |-\sin(t)| = \sin(t) = f(t)$, $\quad 0 < t < \pi$

Från 4.32b får vi direkt serien

$$\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nt)}{1-4n^2}.$$

Slut övning 2