Övning 3 i SF1629, transformer för

CTFYS2 och CMEDT3

Förra gången: Kap 4: Fourierserier

IDAG: Kap 5: L^2-teori

Nästa gång: Kap 6: Separation av variabler

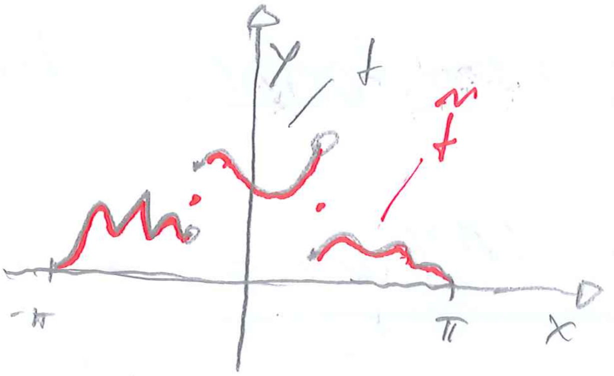
Repetition

$$f \sim \text{Fourierserie} := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx = \frac{\langle f, \cos(nx) \rangle}{\|\cos(nx)\|^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx = \frac{\langle f, \sin(nx) \rangle}{\|\sin(nx)\|^2}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx = \frac{\langle f, e^{inx} \rangle}{\|e^{inx}\|^2}$$

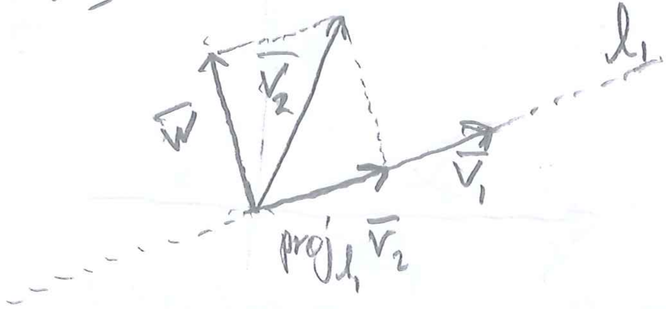


← Illustration av sats 4.5

Tricks $e^{in\pi} = e^{-in\pi} = \cos(n\pi) = \cos(-n\pi) = (-1)^n$, $n \in \mathbb{Z}$

Idag: Gram Schmidts ortogonaliseringsprocess. (324-325 i Rorres)

$\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$



$$\bar{w} = \bar{v}_2 - \text{proj}_{l_1} \bar{v}_2$$

$$= \bar{v}_2 - \frac{\langle \bar{v}_2, \bar{v}_1 \rangle}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1$$

$$\boxed{\bar{w} \perp \bar{v}_1}$$

På samma sätt i funktionsrum med inre produkt

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(x)\, \overline{g(x)}\, r(x)\, dx$$

viktfunktion

Låt $h = g - \frac{\langle g, f \rangle}{\|f\|^2} f$. Då är $\langle f, g \rangle = 0$

d.v.s. $h \perp f$.

5.5 Ortogonalisera följande mängder av vektorer:

a) $\{(1,2,3),(3,1,4),(2,1,1)\}$ i $\mathbb{C}^3$

b) $\{1, x, x^2\}$ i $C[-1,1]$

c) $\{e^{-x}, xe^{-x}, x^2e^{-x}\}$ i $C(0,\infty)$

L: Vi använder Gram-Schmidts process (från och med nu betecknad (GS)) med respektive inre produkt.

a) Låt $\bar{u}_1=(1,2,3)$, $\bar{u}_2=(3,1,4)$ och $\bar{u}_3=(2,1,1)$ och sätt

$$\bar{v}_1=\bar{u}_1=(1,2,3)$$

Med den givna mängden $\{u_1, u_2, u_3\}$ kan vi ta fram en vektor $\bar{w}$ som är ortogonal mot $\bar{v}_1$ via

$$\bar{w}_1=\bar{u}_2-\frac{\langle \bar{u}_2,\bar{v}_1\rangle \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2} = \text{ v.g.v.}$$

$$= (3,1,4) - \frac{\langle (3,1,4),(1,2,3)\rangle}{\|(1,2,3)\|^2}(1,2,3)$$

$$= (3,1,4) - \frac{3\cdot 1 + 1\cdot 2 + 4\cdot 3}{1^2+2^2+3^2}(1,2,3)$$

$$= (3,1,4) - \frac{17}{14}(1,2,3) =$$

$$= \frac{1}{14}(42,14,56) - \frac{1}{14}(17,34,51)$$

$$= \frac{1}{14}(25,-20,5) = \frac{5}{14}(5,-4,1)$$

Då $\bar{w}_1$ är ortogonal mot $\bar{v}_1$, är även $c\bar{w}_1$ ortogonal mot $\bar{v}_1$ för alla konstanter $c \in \mathbb{C}$. Speciellt gäller detta för $c = \frac{14}{5}$ och vi låter $\bar{v}_2$ vara

$$\bar{v}_2 = c\bar{w}_1 = \frac{14}{5}\cdot\frac{5}{14}(5,-4,1) = (5,-4,1)$$

v.g.v.

[Vi gjorde detta för att slippa konstanten $\frac{5}{14}$ framför vektorn, men är ej nödvändigt.]

Verifiering att $\bar{v}_1 \perp \bar{v}_2$: "ortogonal mot"

$\langle (1,2,3),(5,-4,1) \rangle = 1\cdot 5 + 2\cdot(-4) + 3\cdot 1 = 0$ ok!

Nu tar vi fram en vektor $\bar{w}_2$ som är ortogonal mot både $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$ på liknande sätt

$$\bar{w}_2 = \bar{u}_3 - \frac{\langle \bar{u}_3, \bar{v}_1 \rangle}{\|\bar{v}_1\|^2}\bar{v}_1 - \frac{\langle \bar{u}_3, \bar{v}_2 \rangle}{\|\bar{v}_2\|^2}\bar{v}_2$$

$$= (2,1,1) - \frac{\langle (2,1,1),(1,2,3) \rangle}{\|(1,2,3)\|^2}(1,2,3)$$

$$- \frac{\langle (2,1,1),(5,-4,1) \rangle}{\|(5,-4,1)\|^2}(5,-4,1) =$$

v.g.v.

$$= (2,1,1) - \frac{2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 3}{1^2+2^2+3^2}(1,2,3) - \frac{2\cdot 5 + 1\cdot(-4) + 1\cdot 1}{5^2+(-4)^2+1^2}(5,-4,1) =$$

$$= (2,1,1) - \frac{7}{14}(1,2,3) - \frac{7}{42}(5,-4,1)$$

$$= (2,1,1) - \frac{1}{2}(1,2,3) - \frac{1}{6}(5,-4,1)$$

$$= \frac{1}{6}\cdot(12,6,6) - \frac{1}{6}(3,6,9) - \frac{1}{6}(5,-4,1)$$

$$= \frac{1}{6}(4,4,-4) = \frac{2}{3}(1,1,-1).$$

Av samma anledning som tidigare är även $\bar{v}_3 = (1,1,-1)$ ortogonal mot $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$.

<u>Verifiering:</u> $\langle \bar{v}_3, \bar{v}_1 \rangle = \langle (1,1,-1),(1,2,3) \rangle =$

$= 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + (-1)\cdot 3 = 0$ ok!

$\langle \bar{v}_3, \bar{v}_2 \rangle = \langle (1,1,-1),(5,-4,1) \rangle =$

$= 1\cdot 5 + 1\cdot(-4) + (-1)\cdot 1 = 0$ ok!

v.g.v.

Svar a): $\{(1,2,3),(5,-4,1),(1,1,-1)\}$

---

b) Låt $u_1 = 1$, $u_2 = x$ och $u_3 = x^2$

Inre produkten i $C(-1,1)$ är

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

Låt $v_1 = u_1 = 1$. (GS) ger

en vektor $w_1 \perp v_1$,

$$w_1 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = x - \frac{\overbrace{\int_{-1}^{1} x \cdot 1 \cdot dx}^{=0 \ (x \text{ udda ftn})}}{\int_{-1}^{1} 1^2 dx} \cdot 1 =$$

$$= x - 0 = x =: v_2$$

En vektor w_2 som är ortogonal mot

både v_1 och v_2 fås genom

$$w_2 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 =$$

v.g.v.

$$= x - \frac{\int_{-1}^{1} x^2 \cdot 1 \, dx}{\int_{-1}^{1} 1^2 \, dx} \cdot 1 - \frac{\overbrace{\int_{-1}^{1} x^2 \cdot x \, dx}^{=0}}{\int_{-1}^{1} x^2 \, dx} \cdot x$$

$$= x - \frac{\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}}{2} \cdot 1 - 0 = x - \frac{1}{3} =: v_3$$

<u>Verifiering:</u> $\langle 1, x \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x \, dx = 0$ ok!

$$\langle 1, x^2 - \tfrac{1}{3} \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot (x^2 - \tfrac{1}{3}) \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x}{3}\right]_{-1}^{1} = 0 \text{ ok!}$$

$$\langle x, x^2 - \tfrac{1}{3} \rangle = \int_{-1}^{1} x \cdot (x^2 - \tfrac{1}{3}) \, dx = \int_{-1}^{1} x^3 - \frac{x}{3} \, dx =$$

$= \{$udda funktioner på symmetriskt intervall$\} =$

$= 0$ ok!

<u>Svar b):</u> $\{1, x, x^2 - \frac{1}{3}\}$ v.g.v.

c) Låt $u_1 = e^{-x}$, $u_2 = xe^{-x}$ och $u_3 = x^2e^{-x}$

Inre produkten i $C[0,\infty)$ ges av

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

Låt $v_1 = u_1 = e^{-x}$. (GS) ger en

vektor w_1 sådan att $w \perp v_1$,

$$w_1 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = xe^{-x} - \frac{\int_0^{+\infty} xe^{-x}e^{-x}\,dx}{\int_0^{+\infty} (e^{-x})^2\,dx} e^{-x}$$

$$= xe^{-x} - \frac{\int_0^{+\infty} xe^{-2x}\,dx}{\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx} e^{-x} = \left\{ \begin{array}{l} \text{BETA s. 181} \\ \text{formel 40} \end{array} \right\}$$

$$= xe^{-x} - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} e^{-x} = \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-x} =: v_2$$

v.g.v.

Verifiering att $v_1 \perp v_2$:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot (x - \tfrac{1}{2}) e^{-x}\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-2x} (x - \tfrac{1}{2})\, dx$$

$$= \left[\frac{(x - \frac{1}{2}) e^{-2x}}{-2} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-2x}\, dx = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-2x}}{2} \right]_0^{+\infty} =$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0 \quad \text{ok!}$$

(GS) $\Rightarrow$ $w_2 \perp v_1$, $w_2 \perp v_2$ där w ges av

$$w_2 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 =$$

$$= x^2 e^{-x} - \frac{\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} \cdot e^{-x}}{\int_0^{+\infty} (e^{-x})^2\, dx} e^{-x} - \frac{\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} (x - \frac{1}{2}) e^{-x}\, dx}{\int_0^{+\infty} ((x - \frac{1}{2}) e^{-x})^2\, dx} (x - \tfrac{1}{2}) e^{-x}$$

$$= x^2 e^{-x} - \frac{\int_0^{+\infty} x^2 e^{-2x}\, dx}{\int_0^{+\infty} e^{-2x}\, dx} e^{-x} - \frac{\int_0^{+\infty} x^3 e^{-2x}\, dx - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-2x}\, dx}{\int_0^{+\infty} x^2 e^{-2x}\, dx - \int_0^{+\infty} x e^{-2x}\, dx + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{4}\, dx} (x - \tfrac{1}{2}) e^{-x} =$$

v.g.v.

$$= \left\{ \text{BETA s. 181 formel 40} \right\} =$$

$$x^2 e^{-x} - \frac{\frac{2!}{8}}{\frac{1}{2}} e^{-x} - \frac{\frac{3!}{16} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2!}{8}}{\frac{2!}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} (x - \tfrac{1}{2}) e^{-x} =$$

$$= e^{-x} \left[x^2 - \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}} (x - \tfrac{1}{2}) \right] =$$

$$= e^{-x} \left(x^2 - 2x + \frac{1}{2} \right) =: v_3$$

Verifiering att $v_3 \perp v_1$ och $v_3 \perp v_2$:

$$\langle v_3, v_1 \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-x} (x^2 - 2x + \tfrac{1}{2}) e^{-x} \, dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-2x} \left(x^2 - 2x + \frac{1}{2} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{e^{-2x}}{(-2)} (x^2 - 2x + \tfrac{1}{2}) \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-2x} (2x - 2) \, dx =$$

v.g.v.

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-2x}}{(-2)}(2x-2)\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} e^{-2x} \cdot 2\, dx$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0 \text{ ok!}$$

$$\langle V_3, V_2 \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-x}(x^2-2x+\tfrac{1}{2})\, e^{-x}(x-\tfrac{1}{2}) =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-2x}\left(x^3 - \frac{x^2}{2} - 2x^2 + x + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-2x}\left(x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}\right) dx$$

$$= \{\text{BETA s. 181 formel 40}\} =$$

$$= \frac{3!}{16} - \frac{5}{2}\cdot\frac{2!}{8} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{8} =$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{5}{8} + \frac{3}{8} - \frac{1}{8} = 0 \text{ ok!}$$

Svar c): $\{e^{-x}, (x-\tfrac{1}{2})e^{-x}, (x^2-2x+\tfrac{1}{2})e^{-x}\}$

5.7 Bestäm det polynom p av högst grad ett som minimerar

$$\int_0^2 |e^x - p(x)|^2 dx$$

L: Vi börjar med att bestämma en ortogonal bas för rummet av alla polynom av grad ≤ 1 med den inre produkten

$$\langle f, g \rangle = \int_0^2 f(x)\, g(x)\, dx$$

En bas är uppenbarligen $\{1, x\}$ men den är <u>inte</u> ortogonal då

$$\langle 1, x \rangle \int_0^2 1 \cdot x\, dx = 2 \neq 0.$$

Vi använder därför (GS) för att få en ortogonal bas.

V. g. v.

Låt $v_1 = 1$. En vektor $w \perp v_1$ fås av

$$w = x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{\|1\|^2} 1 =$$

$$= x - \frac{\int_0^2 x \cdot 1 \, dx}{\int_0^2 1^2 \, dx} \cdot 1 = x - \frac{2}{2} \cdot 1 =$$

$$= x - 1 =: v_2$$

Verifiering $\langle 1, x-1 \rangle = \int_0^2 1 \cdot (x-1) \, dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_0^2 =$

$= 0$ ok!

Vi vill minimera

$$\int_0^2 |e^x - p(x)|^2 \, dx = \|e^x - p\|^2,$$

och detta görs, enligt Sats 5.3, genom att välja polynomet

v.g.v

$$p(x) = \frac{\langle e^x, 1 \rangle}{\|1\|^2} \cdot 1 + \frac{\langle e^x, x-1 \rangle}{\|x-1\|^2} \cdot (x-1)$$

$$\langle e^x, 1 \rangle = \int_0^2 e^x \, dx = e^2 - 1$$

$$\langle e^x, x-1 \rangle = \int_0^2 e^x \cdot (x-1) \, dx =$$

$$= \left[e^x (x-1) \right]_0^2 - \int_0^2 e^x \, dx =$$

$$= e^2 + 1 - (e^2 - 1) = 2$$

$$\|1\|^2 = \int_0^2 1^2 \, dx = 2$$

$$\|x-1\|^2 = \int_0^2 (x-1)^2 \, dx = \int_0^2 x^2 - 2x + 1 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^2 = \frac{8}{3} - \frac{12}{3} + \frac{6}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{e^2 - 1}{2} \cdot 1 + \frac{2}{2/3} \cdot (x-1) =$$

$$= \frac{e^2 - 1}{2} + 3x - 3 = \frac{e^2 - 7}{2} + 3x$$

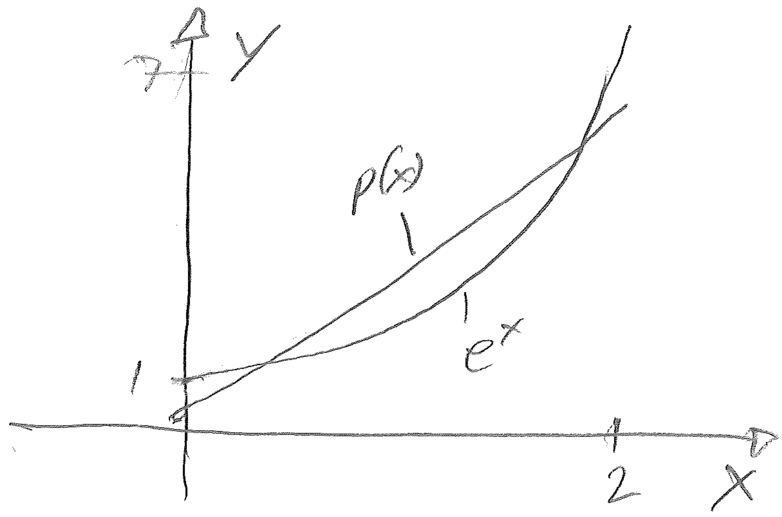
v. g. v.

Svar: $p(x) = \frac{e^2 - 7}{2} + 3x$ är det

polynom som minimerar

$$\int_0^2 |e^x - p(x)|^2 dx$$

bland alla polynom av grad ett.



6.10: Hitta de tre första ortonormala polynomen m.a.p. inre produkten

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,x\,dx$$

genom att ortogonalisera $\{1, x, x^2\}$.

L: Låt $u_1 = 1$, $u_2 = x$ och $u_3 = x^2$

och sätt $v_1 = u_1 = 1$. (GS) ger

en vektor $w_1 \perp v_1$ från u_2,

$$w_1 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 =$$

$$= x - \frac{\int_0^1 x \cdot 1 \cdot x\,dx}{\int_0^1 1^2 x\,dx} \cdot 1 = x - \frac{1/3}{1/2} \cdot 1 = x - \frac{2}{3} =: v_2$$

v.g.v.

På samma sätt,

$$W_2 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\underbrace{\|v_1\|^2}_{=1/2}} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 =$$

$$= x^2 - 2\underbrace{\int_0^1 x^2 \cdot 1 \cdot x\,dx}_{=\frac{1}{4}} - \frac{\int_0^1 x^2 \cdot (x - \frac{2}{3}) \cdot x\,dx}{\int_0^1 (x - \frac{2}{3})^2 \cdot x\,dx} \cdot (x - \frac{2}{3}) =$$

$$= x^2 - \frac{1}{2} - \frac{\left[\frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}\frac{x^4}{4}\right]_0^1}{\int_0^1 x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{9}x\,dx} (x - \tfrac{2}{3}) = x^2 - \frac{1}{2} - \frac{\overbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}}^{1/30}}{\underbrace{\frac{1}{4} - \frac{4}{9} + \frac{4}{18}}_{1/36}} (x - \tfrac{2}{3}) =$$

$$= x^2 - \frac{1}{2} - \frac{36}{30}(x - \tfrac{2}{3}) = x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{3}{10} =: v_3.$$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ är ortogonal men inte ortonormal. Normalisera,

$$z_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1/2}} = \sqrt{2}, \quad z_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \quad \text{v.g.v}$$

$$= \frac{x - \frac{2}{3}}{\sqrt{1/36}} = 6x - 4$$

$$z_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}$$

$$\|v_3\|^2 = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{3}{10}\right)^2 x \, dx =$$

$$= \int_0^1 x^5 - \frac{12}{5}x^4 + \frac{51}{25}x^3 - \frac{18}{25}x^2 + \frac{9}{100}x \, dx =$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{12}{25} + \frac{51}{100} - \frac{18}{75} + \frac{9}{200} = \frac{1}{600}$$

$$\Rightarrow \|v_3\| = \sqrt{\frac{1}{600}} = \frac{1}{10\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow z_3 = \frac{\left(x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{3}{10}\right)}{1/10\sqrt{6}} = \sqrt{6}\left(10x^2 - 12x + 3\right)$$

<u>Svar:</u> $\{z_1, z_2, z_3\} = \{\sqrt{2}, 6x-4, \sqrt{6}(10x^2-12x+3)\}$

Slut övning 3.