Övning 4 i SF1629 transformer

för CTFYS2 och CMEDT3

Förra gången: Kap 5:

IDAG: Kap. 6: Separation av variabler

Nästa gång: Forts. Kap. 6.

Repetition

- Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess

Med ortogonala mängder kan vi lätt

- projicera
- hitta lösningar till minimeringsproblem.

Lösa partiella differentialekvationer (PDE:er)

1) Utför separation av variabler. Detta omvandlar vår PDE till två ODE:er.

2) Separera homogena randvärden

3) Lös det homogena egenvärdesproblemet
   - Red ut olika fall beroende av tecknet på λ.
   - Ta fram alla egenvärden och egenfunktioner

4) Lös den andra ekvationen och använd superposition och Fourierserier för att uppfylla randvärden/begynnelsevärden

---

6.6 Hitta en lösning till värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0<x<\pi, \quad t>0 \quad (1) \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t>0 \quad (RV) \\ u(x,0) = \frac{1}{2}(1+\cos(3x)) & 0<x<\pi \quad (BV) \end{cases}$$

Li 1) Separera variabler, d.v.s. ansätt u som $u(x,t) = X(x)\,T(t)$. Detta insatt i (1) ger

$$X(x)\,T'(t) = X''(x)\,T(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad \lambda \text{ konstant}$$

konvention

$$\Rightarrow \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & (2) \\ T'(t) + \lambda T(t) = 0, & (3) \end{cases}$$

λ konstant.

V.g.v.

2) Separera homogena randvärden,

$$u_x(0,t) = X'(0)T(t) = \{(RV\} = 0$$

$$\Rightarrow X'(0) = 0 \quad (\text{annars blir } u=0)$$

$$u_x(\pi,t) = X'(\pi)T(t) = \{(RV\} = 0 \Rightarrow X'(\pi) = 0$$

---

3) Lös (2) med randvärden,

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & (2) \\ X(0) = X(\pi) = 0 & (SRV) \end{cases}$$

Lösningarna beror på λ. Vi reder ut de olika fallen.

$\underline{\lambda = -\alpha^2 < 0:}$

$$X'' - \alpha^2 X = 0$$

$\Rightarrow$ karakteristiska ekvationen $r^2 - \alpha^2 = 0$

$$\Rightarrow \quad r = \pm\alpha$$

V.g.v.

Den allmänna lösningen blir

$$X(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x} = c_3 \cosh(\alpha x) + c_4 \sinh(\alpha x)$$

$$X'(0) = \alpha c_3 \sinh(\alpha \cdot 0) + \alpha c_4 \cosh(\alpha \cdot 0) = \alpha c_3 \cdot 0 + \alpha c_4 \cdot 1$$

$$= \{(SRV)\} = 0 \Rightarrow c_4 = 0$$

$$X'(\pi) = \alpha c_3 \underbrace{\sinh(\alpha \pi)}_{\neq 0} = \{(SRV)\} = 0$$

$$\Rightarrow \quad c_3 = 0$$

$$\therefore \; X(x) \equiv 0$$

Detta ger $u = X \cdot T = 0$.

$\lambda = 0$: $\quad X'' + 0X = X'' = 0 \Rightarrow X(x) = c_4 x + c_5$

$$X'(0) = c_4 = \{(SRV)\} = 0$$

$$X'(\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = c_5$$

(3) $\Rightarrow T'(t) + 0 \cdot T(t) = 0 \Rightarrow T(t) = A \Rightarrow u(x,t) = Ac_5 =: \frac{a_0}{2}$, a_0 konstant v.g.v.

$\underline{\lambda = \alpha^2 > 0}$:

$$X'' + \alpha^2 X = 0$$

$\Rightarrow$ kar. ekv. $r^2 + \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow r = \pm \alpha i$

$\Rightarrow \quad X(x) = C_6 \cos(\alpha x) + C_7 \sin(\alpha x)$

$X'(0) = -\alpha C_6 \sin(\alpha \cdot 0) + \alpha C_7 \cos(\alpha \cdot 0) = \alpha C_7 =$

$= \{(\text{SRV})\} = 0 \Rightarrow C_7 = 0$

$X'(\pi) = -\alpha C_6 \sin(\alpha\pi) = 0$

$\Rightarrow C_6 = 0$ el. $\sin(\alpha\pi) = 0$

$C_6 = 0 \Rightarrow X = 0$

$\sin(\alpha\pi) = 0 \Rightarrow \alpha\pi = n\pi \Rightarrow \alpha = n, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Detta ger lösningar $X_n(x) = B_n \cos(nx)$
till (2) + (SRV). B_n konstanter

Vi får $\lambda_n = n^2$.

v.g.v.

4) Vi sätter in dessa värden i (3),

$$T_n'(t) + n^2 T_n(t) = 0 \implies T_n(t) = A_n e^{-n^2 t}$$

A_n konstanter. Sammantaget fås

$$u_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) = \underbrace{B_n A_n}_{=:\tilde{a}_n} \cos(nx) e^{-n^2 t}.$$

Varje $u_n(x,t)$ löser (1) + (RV) men ingen enskild löser (BV).

Dock är (1) och (RV) homogena så även en linjärkombination av u_n löser (1) + (RV),

$$u(x,t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n \in \mathbb{Z}}} \tilde{a}_n \cos(nx) e^{-n^2 t}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \cos(nx) e^{-n^2 t} \text{ och } \cos(-nx) e^{-(-n)^2 t} \\ \text{är linjärt beroende så vi} \\ \text{kan skriva dessa två termer som en term} \end{array} \right\} =$$

v.g.v.

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) e^{-n^2 t}$$

$$u(x,0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) = \{(BV)\} = \frac{1}{2}(1+\cos(3x))$$

I det generella fallet utvidgar vi högerledet till en jämn (eller udda om vi har sinustermer) funktion på $-\pi \leq x \leq \pi$, och beräknar Fourierkoefficienterna.

I det här fallet räcker det dock att identifiera koefficienterna eftersom högerledet redan är utvecklad i cosinustermer.

$$a_0 = 1, \quad a_3 = \frac{1}{2}, \quad a_n = 0, \quad n \neq 0, 3.$$

Svar: $u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(3x) e^{-9t}}{2}$ (verifiera)

5.37: Expandera $f(x) = x^3$, $x \geq 0$ i en Fourier-Laguerreserie.

L: Laguerrepolynomen utgör ett fullständigt ortonormalt system så x^3 kan skrivas som

$$x^3 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x^3, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

där φ_n är det n:te Laguerrepolynomet.

Eftersom x^3 är ett polynom av grad 3 har serien ett ändligt antal termer då den n:te termen är ett polynom av grad n.

Detta betyder att $\langle x^3, \varphi_n \rangle = 0$, $n \geq 4$

v.g.v.

Med andra ord,

$$x^3 = \langle x^3, \varphi_0 \rangle \varphi_0 + \langle x^3, \varphi_1 \rangle \varphi_1 + \langle x^3, \varphi_2 \rangle \varphi_2$$
$$+ \langle x^3, \varphi_3 \rangle \varphi_3.$$

BETA s. 268 ger Laguerrepolynomen,

$$\varphi_0 = 1, \quad \varphi_1 = -x+1, \quad \varphi_2 = \frac{x^2}{2} - 2x + 1$$

$$\varphi_3 = -\frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} - 3x + 1$$

Från detta kan vi beräkna de inre produkterna,

$$\langle x^3, \varphi_0 \rangle = \int_0^{+\infty} x^3 \cdot 1 \cdot e^{-x} \, dx = \left\{ \text{BETA s. 181, formel 40} \right\} =$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} \, dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$$= \frac{3!}{1^{3+1}} = 6$$

$$\langle x^3, \varphi_1 \rangle = \int_0^{+\infty} x^3 \cdot (-x+1) e^{-x} \, dx = \left\{ \begin{matrix} \text{BETA samma} \\ \text{formel} \end{matrix} \right\} =$$

v.g.v.

$-4!+3!=-18$

$$\langle x^3, \varphi_2 \rangle = \int_0^{+\infty} x^3 \left(\frac{x^2}{2} - 2x+1\right) e^{-x} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\frac{x^5}{2} - 2x^4 + x^3\right) e^{-x} dx = \frac{5!}{2} - 2\cdot 4! + 3! =$$

$$= 60 - 48 + 6 = 18$$

$$\langle x^3, \varphi_3 \rangle = \int_0^{+\infty} x^3 \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} - 3x+1\right) e^{-x} dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(-\frac{x^6}{6} + \frac{3x^5}{2} - 3x^4 + x^3\right) e^{-x} dx =$$

$$= -\frac{6!}{6} + \frac{3}{2}\cdot 5! - 3\cdot 4! + 3! =$$

$$= -120 + 180 - 72 + 6 = -6$$

Detta ger

$$x^3 = 6\varphi_0 - 18\varphi_1 + 18\varphi_2 - 6\varphi_3$$

V. S. V.

En alternativ lösning är att vi direkt från BETA s. 268 får

$$x^3 = 6\varphi_0 - 18\varphi_1 + 18\varphi_2 - 6\varphi_3$$

Svar: $x^3 = 6\varphi_0 - 18\varphi_1 + 18\varphi_2 - 6\varphi_3$

6.6 Lös

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt}, \quad 0<x<\pi, \quad t>0, & (1) \\ u(x,0) = 3\sin(2x), \quad u_t(x,0) = 5\sin(3x), \quad 0<x<\pi & (BV) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad t>0 & (RV) \end{cases}$$

L: 1) Ansätt $u(x,t)$ som

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t),$$

vilket insätt i (1) ger

$$X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$$

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda \qquad \lambda \text{ konstant}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & (2) \\ T''(t) + \lambda T(t) = 0 & (3) \end{cases}$$

2) (RV) $\Rightarrow X(0)T(t) = X(\pi)T(t) = 0$

$\Rightarrow X(0) = X(\pi) = 0$

v.g.v.

3) problemet

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

har lösningarna $X_n(x) = A_n \sin(nx)$, $n \in \mathbb{Z}$,

för $\lambda = \lambda_n = n^2$.

---

4) För dessa λ löser vi (3),

$$T_n''(x) + n^2 T_n(x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad T_n(x) = B_n \cos(nt) + C_n \sin(nt)$$

Vi får lösningarna

$$u_n(x,t) = X_n(x) T_n(t)$$

$$= \Big(\underbrace{A_n B_n}_{=:a_n} \cos(nt) + \underbrace{A_n C_n}_{=:b_n} \sin(nt)\Big) \sin(nx), \quad n \in \mathbb{Z}$$

till (1) + (RV). Då (1) och (RV)

v.g.v.

är homogena löser även en linjärkombination (1) + (RV),

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(x,t) =$$

$= \left\{ \begin{matrix} \text{Vi ser att } u_n \text{ och } u_n \text{ är} \\ \text{linjärt oberoende och att } c_0 = 0 \end{matrix} \right\} =$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \sin(nx)$$

(BV) ger

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(nx) = 3\sin(2x)$$

$$\Rightarrow a_n = 0,\ n \neq 2,\quad a_2 = 3$$

$$u'(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-na_n \sin(nt) + nb_n \cos(nt)) \sin(nx)$$

$$u'(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} nb_n \sin(nx) = \{(BV)\} = 5\sin(3x)$$

V.g.v.

$\Rightarrow \quad b_n = 0, \; n \neq 3, \quad 3b_3 = 5 \Leftrightarrow b_3 = \frac{5}{3}$

Svar: $u(x,t) = 3\cos(2t)\sin(2x) + \frac{5}{3}\sin(3t)\sin(3x)$

Verifiering: $u_{xx} = -4\cdot 3\cos(2t)\sin(2x) - 9\cdot\frac{5}{3}\sin(3t)\sin(3x)$

$u_t = -2\cdot 3\sin(2t)\sin(2x) + 3\cdot\frac{5}{3}\cos(3t)\sin(3x)$

$u_{tt} = -4\cdot 3\cos(2t)\sin(2x) - 9\cdot\frac{5}{3}\sin(3t)\sin(3x) = u_{xx}$ ok!

RV: $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ ok!

BV: $u(x,0) = 3\sin(2x)$ ok!

$u_t(x,0) = 5\sin(3x)$ ok!

Slut övning 4