Övning 5 i SF1629, transformer för CTFYS2 och CMEDT3

Förra gången: Kap 6: separation av variabler

IDAG: Kap 6 forts. sep. av variabler.

Dirichlets problem i en skiva

Repetition inför KS

Nästa gång: Kap 6.4: Sturm-Liouville-problem

Kap 7: Fouriertransformen

Läxa: Vad säger Plancherels formel?

6.14. Lös Dirichlets problem i enhetsskivan med villkoret

$$u(1,\theta) = \sin^3(\theta)$$

L: Lösningen är på formen

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta))$$

där $\lim_{r\to 1^-} u(r,\theta) = u(1,\theta) = \sin^3(\theta)$

Vi skriver om $\sin^3(\theta)$,

$$\sin^3(\theta) = \left\{\text{BETA s. 128}\right\} = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{\sin 3\theta}{4}$$

$$\Rightarrow \underline{u(r,\theta) = \frac{3r}{4}\sin(\theta) - \frac{r^3}{4}\sin(3\theta)} = \text{Svar}$$

6.7 Lös

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 & (1) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t > 0 & (RV) \\ u(x,0) = \begin{cases} ax, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ a(\pi - x), & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases} & (BV1) \\ u_t(x,0) = 0 & (BV2) \end{cases}$$

Lö: 1) Ansatt $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

som insatt i (1) ger

$$X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & (2) \\ T'' + \lambda T = 0 & (3) \end{cases}$$

V.g.v.

2) (RV) $\Rightarrow$ $X(0) = X(\pi) = 0$

---

3) Detta ger problemet

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

som har lösningarna

$$X_n(x) = C_n \sin(nx), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\lambda = \lambda_n = n^2$$

---

4) (3) har lösningarna

$$T_n(t) = A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)$$

$$\Rightarrow u_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) = C_n \sin(nx)\left(A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)\right) =$$

$$= \begin{Bmatrix} C_n A_n = a_n \\ C_n B_n = b_n \end{Bmatrix} = \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right) \sin(nx)$$

v.g.v.

Även en linjärkombination löser (1) + (BV),

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cos(nt)\sin(nx) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \sin(nt)\sin(nx) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \cos(nt)\sin(nx) \text{ och } \cos((-n)t)\sin((-n)x) \text{ är linjärt beroende} \\ \sin(nt)\sin(nx) \text{ och } \sin((-n)t)\sin((-n)x) \text{ —— '' ——} \end{array} \right\} =$$

Ej samma konstanter som raden innan

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt)\sin(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nt)\sin(nx)$$

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} -n a_n \sin(nt)\sin(nx) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{+\infty} n b_n \cos(nt)\sin(nx)$$

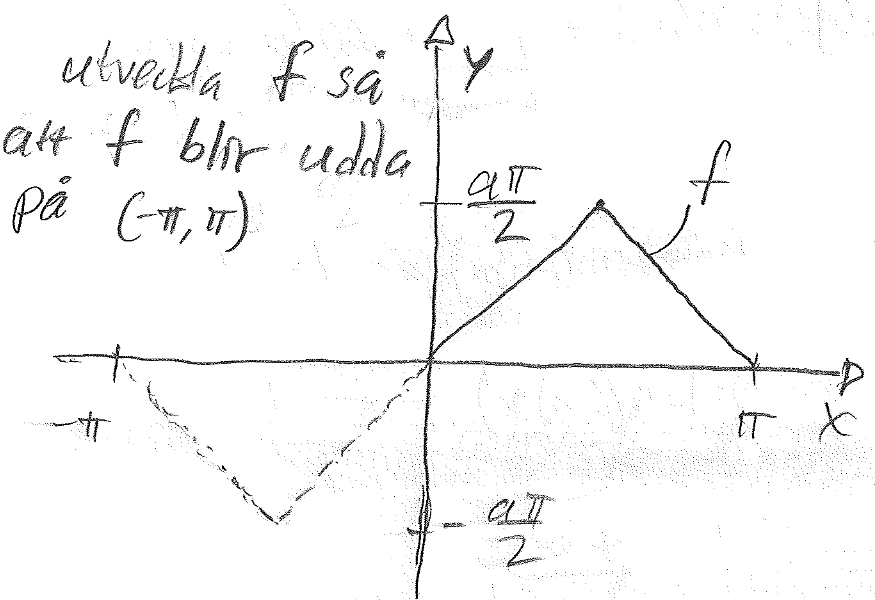
$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} n b_n \sin(nx) = \{(BV2)\} = 0$$

$$\Rightarrow b_n = 0 \quad \forall n$$

V.g.v.

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(nx) = \{(BV1)\} = \begin{cases} ax, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ a(\pi - x), & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$$

utvecka f så att f blir udda på $(-\pi, \pi)$



Vi väljer a_n som f:s *Fourierkoefficienter

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} ax\sin(nx)\,dx +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} a(\pi - x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-ax\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} +$$

Lika med olika tecken

$$+ \frac{2a}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(nx)}{n}\,dx + \frac{2a}{\pi}\left[-a(\pi - x)\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{\pi/2}^{\pi} +$$

$$+ \frac{2a}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\left(-\frac{\cos(nx)}{n}\right)dx = \text{v.g.v.}$$

$$= \frac{2a}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2a}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{4a}{\pi n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{4a}{\pi n^2}, & n = 4k+1 \\ -\frac{4a}{\pi n^2}, & n = 4k+3, \quad k \in \mathbb{N} \\ 0, & n = 2k \end{cases}$$

Detta kan också skrivas som

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{4a}{\pi(2n+1)^2}, \quad a_{2n} = 0$$

<u>Svar:</u> $u(x,t) = \frac{4a}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)t)\sin((2n+1)x)$

——— * ———

2003-08-25.3

Bestäm de konstanter a och b som minimerar integralen

$$\int_{-1}^{1} |a+bx^2-\cos(x)|^2 dx$$

Li Vi vill projicera vektorn $\cos(x)$ ortogonalt på underrummet V till $L^2(-1,1)$, där V består av alla funktioner på formen $a+bx^2$. En bas till V är $\{1, x^2\}$ och den inre produkten $\langle \cdot, \cdot \rangle$ som vi är intresserade av definieras som

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

V.g.v.

Vi börjar med att ta fram en ortogonal bas till V med hjälp av basen $\{1, x^2\}$ och Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess. Låt $v_1 = 1$.

Sätt

$$w_1 = x^2 - \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\|1\|^2} \cdot 1 = x^2 - \frac{\int_{-1}^{1} x^2 \cdot 1 \, dx}{\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1 \, dx} =$$

$$= x^2 - \frac{2/3}{2} = x^2 - \frac{1}{3} =: v_2.$$

$\{v_1, v_2\}$ bildar en ortogonal bas till V och vi kan nu projicera $\cos(x)$ ortogonalt på V.

$$\text{proj}_V(\cos(x)) = \frac{\langle \cos(x), 1 \rangle}{\|1\|^2} \cdot 1 + \frac{\langle \cos(x), x^2 - \frac{1}{3} \rangle}{\|x^2 - \frac{1}{3}\|^2} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

v. g. v.

$$\langle \cos(x), 1 \rangle = \int_{-1}^{1} \cos(x) \cdot 1 \, dx = 2\sin(1)$$

$$\|1\|^2 = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1 \, dx = 2$$

$$\langle \cos(x), x^2 - \tfrac{1}{3} \rangle = \int_{-1}^{1} \cos(x) \cdot (x^2 - \tfrac{1}{3}) \, dx =$$

$$= \{ \text{integranden är jämn} \} = 2 \int_{0}^{1} \cos(x)(x^2 - \tfrac{1}{3}) \, dx$$

$$= 2 \int_{0}^{1} \cos(x) x^2 \, dx - \frac{2\sin(1)}{3}$$

$$= \{ \text{BETA s. 168, formel 219} \} =$$

$$= 2\left[-2\sin(x) + 2x\cos(x) + x^2 \sin(x)\right]_0^1 - \frac{2\sin(1)}{3} =$$

$$= 4\cos(1) - 2\sin(1) - \frac{2\sin(1)}{3} = 4\cos(1) - \frac{8\sin(1)}{3}$$

V.g.v.

$$\| x^2-\tfrac{1}{3}\|^2 = \int_{-1}^{1}\left(x^2-\tfrac{1}{3}\right)^2 dx = 2\int_0^1 \left(x^2-\tfrac{1}{3}\right)^2 dx =$$

$$= 2\int_0^1 x^4 - \frac{2x^2}{3} + \frac{1}{9}\, dx = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} =$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{2}{9} = \frac{18-10}{45} = \frac{8}{45}$$

Vi får därmed

$$\text{proj}_W \cos(x) = \frac{2\sin(1)}{2} + \frac{4\cos(1) - \frac{8\sin(1)}{3}}{8/45}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \sin(1) + \frac{45\left(\cos(1) - \frac{2\sin(1)}{3}\right)}{2}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \sin(1) - \frac{15}{2}\cos(1) + 5\sin(1) + \frac{45\left(\cos(1) - \frac{2\sin(1)}{3}\right)}{2}x^2$$

$$= \underbrace{6\sin(1) - \frac{15}{2}\cos(1)}_{=a} + \underbrace{\left(\frac{45}{2}\cos(1) - 30\sin(1)\right)}_{=b}x^2$$

<u>Svar:</u> $a = 6\sin(1) - \frac{15}{2}\cos(1)$, $b = \frac{45}{2}\cos(1) - 30\sin(1)$

Egengjord övning: Visa att $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ utgör en positiv summationskärna om

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & x > \frac{1}{n} \\ f_n(-x), & x < 0 \end{cases}$$

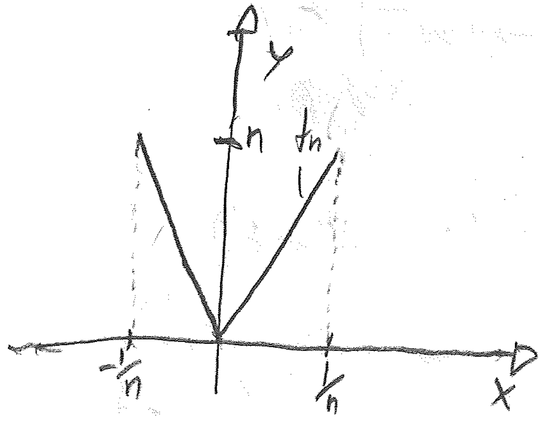
L: Vi vill visa följande tre egenskaper

i) $f_n(x) \geq 0 \quad \forall x$ och $\forall n$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = 1$

iii) Om $\delta > 0$, då gäller det att

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{|x| > \delta} f_n(x)\,dx = 0$$



i) är uppenbarligen uppfyllt

v.g.v.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx = \{f_n \text{ jämn}\} =$$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{n}} n^2 x\,dx = 2\cdot\left[\frac{n^2x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{n}} = 1$$

så ii) är också uppfyllt

Låt nu $\delta > 0$. Eftersom vi ska låta n gå mot $+\infty$ kan vi utan inskränkning anta att $n > \frac{1}{\delta}$. Detta ger att

$\frac{1}{n} < \delta$ så

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{|x|>\delta} f_n(x)\,dx = \{f_n \text{ jämn}\} = \lim_{n\to+\infty} 2\int_{x>\delta} f_n(x)\,dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} f_n(x) = 0 \text{ om } x > \frac{1}{n}. \text{ Med antagandet } \frac{1}{n} < \delta \\ \text{får vi att } f_n(x) = 0 \text{ då } x > \delta \end{array} \right\} = \lim_{n\to+\infty} \int_{x>\delta} 0\,dx =$$

$= 0$. Därmed uppfyller $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ i, ii och iii. $\square$

Slut övning 5